



TESIS DE DOCTORADO

CONTRIBUCIONES AL MODELADO Y
CÁLCULO DE SOLUCIONES EN
PROBLEMAS DE INVESTIGACIÓN
OPERATIVA

Jorge Rodríguez Veiga

ESCUELA DE DOCTORADO INTERNACIONAL DE LA UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
PROGRAMA DE DOCTORADO EN ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

SANTIAGO DE COMPOSTELA
2021





DECLARACIÓN DEL AUTOR DE LA TESIS

“Contribuciones al modelado y cálculo de soluciones en problemas de investigación operativa”

D. Jorge Rodríguez Veiga

Presento mi tesis, siguiendo el procedimiento adecuado al Reglamento, y declaro que:

1. La tesis abarca los resultados de la elaboración de mi trabajo.
2. En su caso, en la tesis se hace referencia a las colaboraciones que tuvo este trabajo.
3. La tesis es la versión definitiva presentada para su defensa y coincide con la versión enviada en formato electrónico.
4. Confirmo que la tesis no incurre en ningún tipo de plagio de otros autores ni de trabajos presentados por mí para la obtención de otros títulos.

En Santiago de Compostela, 14 de junio de 2021

Fdo. Jorge Rodríguez Veiga





AUTORIZACIÓN DE LA DIRECTORA DE LA TESIS

“Contribuciones al modelado y cálculo de soluciones en problemas de investigación operativa”

Dña. Balbina Virginia Casas Méndez

INFORMA:

Que la presente tesis, se corresponde con el trabajo realizado por D. Jorge Rodríguez Veiga, bajo mi dirección, y autorizo su presentación, considerando que reúne los requisitos exigidos en el Reglamento de Estudios del Doctorado de la USC, y que como directora de esta no incurre en las causas de abstención establecidas en la Ley 40/2015.

De acuerdo con lo indicado en el Reglamento de Estudios de Doctorado, declara también que la presente tesis de doctorado es idónea para ser defendida en base a la modalidad de COMPENDIO DE PUBLICACIONES, en los que la participación del doctorando fue decisiva para su elaboración y las publicaciones se ajustan al Plan de Investigación.

En Santiago de Compostela, 14 de junio de 2021

Fdo. Balbina Virginia Casas Méndez



Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer a mi directora de tesis, Balbina Casas Méndez, todo el trabajo y apoyo que he recibido por su parte a lo largo de estos años. Gracias a ella comencé a tener curiosidad por la teoría de juegos y la optimización, y esta curiosidad ha conseguido mantenerla intacta durante todos estos años. De su mano realicé el Proyecto Final de Máster y posteriormente me animó para la realización de esta tesis. Quiero agradecerle la confianza que depositó al contratarme en el marco del proyecto LUMES, lo que supuso mi primer contrato con una empresa. Por todo esto y mucho más, gracias.

Al igual que a Balbina, me gustaría agradecerle a Julio González Díaz todo el trabajo realizado conmigo. Tuve la fortuna de poder disfrutar muchos años trabajando bajo su tutela y todo lo aprendido creo que de un modo u otro está reflejado también en esta tesis. Gracias por todo el conocimiento, por implicarme en nuevos retos y por haber permitido que mi formación en mi etapa como doctorando se hubiese enriquecido llevándome a numerosos cursos y congresos.

Aprovecho para dar mi profundo agradecimiento a todos los coautores de los trabajos que están recogidos en esta tesis, sin ellos esto no habría sido posible. Gracias Ángel González, Balbina Casas, David Rodríguez, Guido Novoa, Iván Gómez, José Luís Sáiz y María José Ginzo. Aprovecho para agradecer especialmente el trabajo de María José Ginzo por toda la ayuda y consejos que me ofreció durante todos estos años.

También agradecer al Instituto Tecnológico de Matemática Industrial (ITMATI) la oportunidad de trabajar todos estos años junto a ellos en proyectos de transferencia, en concreto en los proyectos LUMES y las co-

laboraciones que surgieron con la empresa Repsol. Todo el conocimiento que he adquirido a lo largo de todos estos años es en gran parte gracias a ellos. Quiero agradecer a todos los IPs de los proyectos en los que me vi involucrado por confiar en mi trabajo y enseñarme tantas cosas, ya no solo del mundo de las matemáticas. En este sentido, gracias a: Balbina Casas, Wenceslao González, Beatriz Pateiro, Julio González, Alfredo Bermúdez y Francisco José Pena. Pero además, este agradecimiento es para todas esas personas con las que compartí horas de trabajo y de tiempo libre en ITMATI, porque todas esas personas conforman una gran familia para mí. Muchísimas gracias en especial a Adolfo Núñez (Fito), Andrea Vilar, Daniel Alves, Diego Rodríguez, Gabriel Álvarez, Irene Llana, Javier López, Joaquín Ossorio, Juan Bedoya, Manuel Cremades, Manuel Fontenla, Marcos Raydan, Oana Chis, Patricio Reyes (Pato) y Rabi Ouallam.

Quiero dar las gracias también a mis compañeros de máster Alejandro Saavedra e Iria Roca, ya que esta andanza la comenzamos juntos y todas esas tardes y noches de risas y de agobios con una cerveza en la mano jamás las olvidaré.

Por último, no puedo acabar estas palabras sin darle las gracias a mi familia. Agradecer a mis padres, hermano, abuelos y pareja por apoyarme en todo momento y confiar siempre en mí. En especial a mi madre, mi abuela y mi pareja; los tres pilares fundamentales de mi vida. Mi madre, porque desde pequeño me hizo entender las matemáticas como el juego más apasionante del mundo, algún día espero poder transmitir todo ese amor y conocimiento a mis hijos. A mi abuela porque siempre fue como una segunda madre, y aunque ya no esté aquí, sé que se sentiría muy orgullosa de mí. Y por último a mi compañera de vida, Noa, por toda su comprensión y apoyo incondicional recibido durante esta etapa.

Resumen

La presente tesis abarca cuestiones tanto de teoría de juegos como de programación lineal entera mixta, conectadas por un hilo común, la investigación sobre modelado de problemas reales y el cálculo eficiente de soluciones.

Primeramente, se presenta el cálculo de dos índices de poder, el índice con configuración y el índice de Banzhaf-Coleman generalizado, para juegos de mayoría ponderada con configuración de coaliciones. El trabajo novedoso consiste en el empleo de las funciones generatrices para la obtención de estos índices demostrando matemáticamente su idoneidad. Además, se realiza una extensión de los algoritmos a la clase más amplia de juegos de mayoría ponderada múltiple. Se presentan ejemplos de la vida real que muestran el alcance del modelo considerado y los algoritmos introducidos.

El resto del trabajo se centra en la resolución de algunos problemas surgidos de la colaboración con la empresa Babcock España, líder española en servicios aéreos de emergencia. Los problemas reflejan los requerimientos relativos a la selección y organización óptima de recursos para la contención de incendios forestales. En la tesis se da solución a tres problemas concretos: la Selección y Asignación temporal de Recursos para la Contención de un incendio forestal (**SARC**), la Asignación de Aeronaves a Rutas de Vuelo (**AARV**) y la Asignación de Aeronaves a Puntos de Repostaje (**AAPR**). Además, debido a la complejidad del problema **SARC**, se realiza un estudio de la aplicabilidad de distintas técnicas de descomposición para mejorar la eficiencia en la resolución del mismo.



Abstract

This thesis covers questions of both game theory and linear programming, more precisely, mixed integer linear programming, connected by a common thread that is research on the model of real problems and the efficient calculation of solutions.

The calculation of the configuration index and generalized Banzhaf-Coleman index for weighted majority games with coalition configuration through the use of generating functions is presented. The calculation of the indices is presented, mathematically demonstrating their suitability. Furthermore, an extension of the algorithms is made to the broader class of multiple weighted majority games. Real life examples are presented showing the scope of the considered model and the algorithms introduced.

The other problems are focused on solving some questions that have arisen from the collaboration with the company Babcock Spain, the Spanish leader in emergency air services. The problems reflect the requirements related to the selection and optimal organization of resources for fire fighting. The thesis provides a solution to three specific problems: the selection and temporary allocation of resources for the containment of a forest fire (**SARC**), the assignment of aircraft to flight routes (**AARV**) and the assignment of aircraft to points of refueling (**AAPR**). In addition, due to the complexity of the **SARC** problem, a study of the applicability of different decomposition techniques is carried out to improve the efficiency solving the problem.



Índice general

| | |
|--|------------|
| Índice general | vii |
| 1. Introducción | 1 |
| 2. Hipótesis y objetivos | 7 |
| 2.1. Hipótesis y objetivos generales | 7 |
| 2.1.1. Índices de poder | 8 |
| 2.1.2. Gestión de recursos en la contención de incendios forestales | 9 |
| 2.2. Hipótesis y objetivos específicos | 11 |
| 3. Herramientas metodológicas | 13 |
| 3.1. Índices de poder | 13 |
| 3.2. Gestión de recursos en la contención de incendios forestales | 29 |
| 4. Discusión general | 31 |
| 4.1. Índices de poder | 31 |
| 4.2. Gestión de recursos en la contención de incendios forestales | 33 |

| | |
|---|------------|
| 5. Trabajos publicados y sometidos a revisión | 49 |
| 5.1. <i>Implementing generating functions to obtain power indices with coalition configuration</i> | 51 |
| 5.2. <i>An integer linear programming model to select and temporally allocate resources for fighting forest fires</i> | 52 |
| 5.3. <i>Application of decomposition techniques in a wildfire suppression optimization model</i> | 53 |
| 5.4. <i>Assignment problems in wildfire suppression: models for optimization of aerial resource logistics</i> | 87 |
| 5.5. <i>Wildfire resources management: a decision support tool created with R to solve optimization models in logistics for fighting forest fires</i> | 88 |
| 6. Conclusiones y trabajo futuro | 89 |
| 6.1. Índices de poder | 90 |
| 6.2. Gestión de recursos en la contención de incendios forestales | 91 |
| Bibliografía | 95 |
| A. Técnicas de descomposición | 105 |
| A.1. Descomposición lagrangiana | 107 |
| A.2. Descomposición de Dantzig–Wolfe | 110 |
| A.3. Descomposición de Benders | 116 |
| Índice de figuras | 123 |

Capítulo 1

Introducción

Comenzamos este trabajo realizando una presentación del marco teórico en el que se inscribe el tema de esta tesis. Específicamente se mostrará una justificación razonada de la unidad y coherencia temática y metodológica de la misma.

La investigación de operaciones (o investigación operativa) es una rama de las matemáticas que hace uso de métodos cuantitativos y que sirve como herramienta de apoyo para el proceso de toma de decisiones.

Varios autores atribuyen sus inicios a matemáticos como Christiaan Huygens y Blaise Pascal al analizar, en 1654, el *problema de la partida interrumpida*, también llamado *problema de la división de las participaciones* o *de los puntos*. El problema fue propuesto por el jugador y aficionado a las matemáticas Antoine de Gambaud, más conocido como el Caballero de Merè. La formulación general de este juego es:

Dos jugadores, A y B , deciden jugar a un juego hasta que uno de ellos haya ganado un número específico, g , de partidas. Si el juego se detiene prematuramente cuando A ha ganado r juegos y B ha ganado s juegos (con r y s ambos menores que g), ¿cómo deberían dividirse la apuesta realizada?

Posteriormente, también surgieron problemas relacionados, como los

modelos abstractos de programación matemática, creados en 1759 por el economista y médico francés Francois Quesnay, para representar el flujo de mercancías a lo largo del proceso de producción y consumo; la investigación del matemático Charles Babbage [10], sobre el costo del transporte y la clasificación del correo (realizada en la *Uniform Penny Post* de Inglaterra en 1840); o el estudio de la gestión de inventarios, con el concepto de cantidad económica de pedido, desarrollado por el ingeniero de producción Ford W. Harris en 1913, entre otros.

Pero es a comienzos del siglo XX cuando surge la actual investigación operativa (McCloskey [54], Rajgopal [66]). En los años precedentes a la Segunda Guerra Mundial, los ejércitos de Gran Bretaña, primero, y de los Estados Unidos después, ven la necesidad de hacer frente a la utilización eficaz de nuevas armas y nuevos desafíos relacionados con el despliegue de radares, la lucha antisubmarina y, en general, la dirección de operaciones militares complejas.

Científicos en el Reino Unido, incluyendo al físico Patrick Blackett, el genetista Cecil Gordon, el zoólogo Solly Zuckerman, el biólogo Conrad Hal Waddington, el químico Owen Wansbrough-Jones, el estadístico Frank Yates, el matemático Jacob Bronowski y el físico y matemático Freeman Dyson, y en los Estados Unidos, con el físico y matemático George Dantzig, buscaron herramientas para tomar mejores decisiones en áreas como la logística o en problemas como el diseño de horarios de adiestramiento.

Durante la Segunda Guerra Mundial, Blackett propulsó la fundación del campo de estudio conocido como investigación de operaciones. Durante la guerra, se mostró disconforme con las tácticas del bombardeo estratégico, usando la investigación de operaciones para demostrar que no tenía los efectos que los comandantes militares pensaban. Es interesante recoger la frase que Blackett incluyó en su informe *Scientist for Operational Level* (1941) destacando la importancia de la investigación de operaciones: “Se ha realizado bastante esfuerzo científico hasta ahora en la producción de nuevos dispositivos pero muy poco en el uso adecuado y eficaz de lo que hemos producido”.

También otros matemáticos como John von Neumann comenzaron, en paralelo, a trabajar sobre una parte de la investigación de operaciones que hoy se conoce como teoría de juegos y que se ocupa del estudio

matemático de las situaciones conflictivas. Von Neumann propuso aplicar el lenguaje de la teoría de juegos y la teoría del equilibrio general para el estudio de la economía. Su primera contribución significativa fue el teorema minimax en 1928 [58] con información perfecta y dos jugadores,¹ el cual extendió en 1944 en el libro *Theory of Games and Economic Behavior* [83], escrito junto con el economista Oskar Morgenstern.

Una vez terminada la guerra, muchos de los científicos continuaron desarrollando los métodos empleados durante los años previos. Un hito fundamental en el desarrollo de la investigación operativa fue la introducción por George Dantzig, en el año 1947, del *método simplex*. El método simplex es en términos de aplicación generalizada, uno de los más exitosos de todos los tiempos, ya que la programación lineal domina el mundo de la industria. Además, es considerado por SIAM (Sociedad de Matemática Aplicada e Industrial) uno de los 10 algoritmos más relevantes del siglo XX. Es por ello que así como Blackett está considerado el padre de la investigación operativa, y von Neumann el de la teoría de juegos, Dantzig es considerado el padre de la programación lineal.

Se ha de señalar que la presente tesis, que se enmarca dentro de la investigación operativa, abarca cuestiones tanto de teoría de juegos como de programación lineal. Ambas conectadas por un hilo común, la búsqueda eficiente de soluciones en problemas de la vida real.

Hoy en día, el uso de modelos de investigación de operaciones es cada vez más frecuente como herramienta de apoyo en la toma de decisiones. Este mayor uso se explica, principalmente, por una serie de causas interconectadas. Entre ellas, cabe mencionar una apertura y un conocimiento cada vez más profundo de estas metodologías en un abanico de disciplinas cada vez más amplio, la aparición de problemas cada vez más complejos que se desea resolver, la mayor disponibilidad de software y el desarrollo de nuevos y mejores algoritmos de resolución.

En la actualidad, las herramientas de la investigación de operaciones se aplican ampliamente a los problemas en los negocios, la industria y la sociedad en general. Ejemplos de ello es el uso de la investigación de operaciones en la industria petroquímica, las compañías aéreas, las

¹El teorema establece que en ciertos juegos de suma cero existe una estrategia que permite a ambos jugadores minimizar su máxima pérdida.

finanzas, la logística y las administraciones públicas.

La construcción de herramientas que hacen uso de la investigación operativa suele ser realizada por un equipo de especialistas junto con el cliente. Además, independientemente de la naturaleza del problema, cabe distinguir las siguientes etapas:

1. Definición del problema.
2. Formulación del modelo matemático.
3. Resolución del modelo.
4. Validación del modelo.
5. Interpretación y puesta en práctica de la solución.

La definición del problema implica establecer una descripción clara y precisa de la situación a la que nos enfrentamos. Es en esta fase en la que el cliente tiene un papel crucial por ser la persona conocedora del problema. Por norma general, suelen ser necesarias varias reuniones para definir claramente las decisiones que se deberán de tener en cuenta, el objetivo que nos permite valorar las distintas decisiones, y las restricciones o limitaciones que el problema presenta. Este proceso de definición es crucial pues afectará de manera significativa a las conclusiones del estudio.

La segunda etapa es la formulación de un modelo matemático. En ella se deberá de construir un modelo que represente el problema definido por el cliente. Este será representado por un conjunto de ecuaciones y expresiones matemáticas: las decisiones, que serán representadas por variables; una función objetivo, que permitirá medir la calidad de las mismas, y un conjunto de restricciones para que el modelo tenga en cuenta las limitaciones establecidas por el cliente. Este modelo representará una aproximación abstracta de la realidad.

Una vez formulado el modelo matemático, podremos proceder a su resolución. Solucionar el modelo consiste en encontrar los valores de las variables, con el propósito de optimizar, si es posible, o cuando menos mejorar la eficiencia o la efectividad del sistema dentro del marco de referencia que fijan los objetivos y las restricciones del problema. La selección del método de resolución depende de las características del modelo. Muchos de los procedimientos de resolución tienen la característica de ser iterativos, es decir buscan la solución en base a la repetición de

la misma regla analítica hasta llegar a ella, si la hay, o cuando menos a una aproximación.

Cuando se completa la primera versión del modelo, es inevitable que contenga errores. Para validar el modelo se deben realizar numerosos estudios de simulación. Con ellos se podrán identificar posibles errores para su corrección, así como comprobar que los resultados obtenidos son los deseados. La etapa de validación del modelo y de la resolución es crucial para determinar si el modelo propuesto hace lo que se supone que debe hacer.

La etapa final se inicia con la puesta en práctica de la solución. En este punto es crucial traducir la solución encontrada a instrucciones y operaciones comprensibles para los individuos que intervienen en la toma de decisiones.

En la Figura 1.1 se muestra cómo se deben emplear los métodos de la investigación operativa una vez se ha realizado el proceso de validación del modelo. En este caso diferenciamos la resolución de un problema matemático correctamente formulado frente a la intuición de los agentes involucrados en un proceso de toma de decisiones. Este esquema viene a reforzar la idea de que aunque en muchas ocasiones la intuición pueda ser una herramienta adecuada en la toma de decisiones, si se apoya en la interpretación de los resultados arrojados por un modelo de investigación operativa, esta puede fortalecerse tomando así decisiones más eficientes.

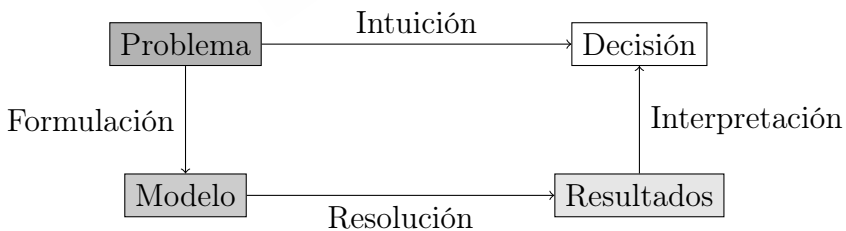


Figura 1.1: Esquema de uso de la investigación operativa.

Se puede concluir, que la investigación operativa se centra en encontrar solución a problemas de decisión en la vida real con el fin de maximizar o minimizar una o varias funciones objetivo y sujeto a una

serie de condicionantes o restricciones. En función del tipo de problemas se puede establecer una primera clasificación dentro de la investigación operativa que ya se fue perfilando a lo largo de la introducción histórica: la teoría de juegos y la optimización matemática. Cabe señalar que mientras los problemas de optimización involucran a un decisor, los problemas de teoría de juegos corresponden a más de un decisor.

Para finalizar se describe a continuación la distribución de la tesis. En el presente capítulo se explica el contexto del trabajo realizado, estableciendo las bases históricas y también metodológicas de la disciplina en la que se enmarca la presente tesis, la investigación operativa. El Capítulo 2 establece las hipótesis y objetivos que se tratarán en la tesis, diferenciando los objetivos e hipótesis que se abordarán en los trabajos presentados. En el Capítulo 3 se realiza una revisión de las herramientas empleadas para la resolución de los problemas planteados. En este caso, se establece el marco teórico necesario para la comprensión del trabajo sobre el cálculo de índices de poder [72] y las herramientas empleadas para el cálculo de soluciones en los problemas de gestión de recursos en la contención de incendios forestales (trabajos [68], [70], [71], además del documento de trabajo [73]). El Capítulo 4 presenta una discusión general de los índices de poder, enmarcándolos dentro de la teoría de juegos, y de la gestión de recursos en la contención de incendios forestales, presentando el contexto en el que se producen este tipo de problemas y estableciendo la relación entre los mismos.

En el Capítulo 5 se presentan los trabajos publicados y sometidos a revisión que conforman la tesis por compendio de artículos. Los trabajos incluidos en este capítulo son: [72] (Sección 5.1), [70] (Sección 5.2), [73] (Sección 5.3), [71] (Sección 5.4) y [68] (Sección 5.5).

En el Capítulo 6 se presentan las conclusiones de la tesis, diferenciando el trabajo del cálculo de índices de poder, Sección 6.1, de los trabajos para una gestión eficiente de los recursos empleados en la contención de un incendio forestal, Sección 6.2. Además, se indica el trabajo futuro que se puede realizar siguiendo las líneas de trabajo establecidas.

Por último, en el Apéndice A se presenta una descripción de las técnicas de descomposición empleadas en la Sección 5.3. La inclusión de este apéndice busca facilitar la comprensión del trabajo presentado en la sección previamente mencionada.

Capítulo 2

Hipótesis y objetivos

En este capítulo, se explican las hipótesis y objetivos generales y específicos que se pretenden alcanzar con esta tesis, indicando además en qué publicación o publicaciones se abordan.

2.1. Hipótesis y objetivos generales

En la actualidad existen diversos problemas que se pueden atacar desde el punto de vista de la investigación de operaciones. Algunos de los problemas ampliamente trabajados son los de planificación, asignación, localización, reparto de costes...

Este trabajo se centra en la obtención de soluciones para dos tipos de problemas. El primero, Sección 2.1.1, consiste en la obtención de índices de poder en problemas de mayoría ponderada con configuración de coaliciones. El segundo, Sección 2.1.2, reside en la gestión de recursos mediante el modelado y resolución de problemas relacionados con la contención de incendios forestales.

2.1.1. Índices de poder

La teoría de juegos se clasifica en dos grandes áreas: juegos cooperativos y juegos no cooperativos. El primer problema abordado en esta tesis se enmarca dentro de los juegos cooperativos, donde los jugadores disponen de mecanismos que les permiten adoptar acuerdos vinculantes con otros jugadores.

Los agentes involucrados en un juego se denominan jugadores. Dentro de los juegos cooperativos, cuando el pago que se puede garantizar cada coalición (o subconjunto de jugadores) como consecuencia de la cooperación entre sus miembros, se puede repartir de cualquier forma entre los miembros de dicha coalición, se habla de un juego cooperativo con utilidad transferible (abreviadamente, juego TU). Una de las principales metas en el estudio de los juegos TU es la definición de reglas de distribución (denominadas valores) de los pagos derivados de la cooperación de todos los jugadores entre cada uno de ellos. Dos de los valores más importantes son el de Shapley [76] y el de Banzhaf [11] (nombrado en muchas ocasiones como Banzhaf-Coleman en el contexto de índices de poder debido a la similitud respecto al trabajo realizado por Coleman [24]).

Un caso particular de los juegos TU son los juegos simples, que cobran gran relevancia debido a su aplicación a las ciencias sociales y políticas. Un juego simple se puede definir a partir de un conjunto finito de jugadores y un conjunto de coaliciones denominadas ganadoras. Además, dentro de este tipo de juegos, están los juegos de mayoría ponderada, donde en vez de hablar de valor se usa el término índice de poder (debido a su uso en modelos de órganos de toma de decisiones en los que los acuerdos se toman por votación). El interés de estos juegos se suele centrar en conocer el poder o influencia, que tiene cada uno de los jugadores dentro del juego, una vez se conoce el resultado de la votación. En este contexto el valor de Shapley se renombra como índice de poder de Shapley-Shubik [77].

Además, parece lógico que en muchas ocasiones, los jugadores involucrados en el juego, tengan preferencias por unirse a unos jugadores frente a otros por diversos motivos, como pueden ser ideologías políticas o ubicaciones geográficas. De este modo, Owen generaliza los valores de Shapley-Shubik y Banzhaf-Coleman para juegos donde existe una parti-

ción del conjunto de jugadores en uniones a priori, nombrándolos como índice de Owen [63] y Banzhaf-Owen [60] respectivamente para juegos simples con estructura de coalición o uniones a priori.

Por último, al extender los resultados a juegos simples con configuración de coaliciones (donde existe un recubrimiento del conjunto de jugadores tal que un jugador puede pertenecer a más de una coalición), entonces al valor de Owen y al índice de poder de Banzhaf-Owen se les conoce como índice con configuración [2] (también conocido como Owen-Shapley con configuración de coaliciones u Owen-Shapley CC) e índice de Banzhaf-Coleman generalizado [3] (también nombrado como Owen-Banzhaf con configuración de coaliciones u Owen-Banzhaf CC). Esta extensión a los juegos con configuración de coaliciones modela mejor determinadas situaciones reales en las que un jugador puede tener preferencias a colaborar con más de un grupo de jugadores. Por ejemplo, considérense las relaciones diplomáticas entre países. En la vida real, los países están organizados en coaliciones internacionales, no necesariamente disjuntas. Por ejemplo, Francia y España, entre otros, pertenecen a la Unión Europea y la Organización del Tratado del Atlántico Norte (OTAN), por otro lado Estados Unidos pertenece a la OTAN y al Tratado de Libre Comercio de América del Norte (TLCAN), mientras que México únicamente pertenece al TLCAN. Todos ellos pertenecen al Fondo Monetario Internacional (FMI).

Dada la complejidad computacional para la obtención de estos índices de poder, en la actualidad un gran número de investigadores está trabajando en alternativas para su cálculo. Algunas de las más remarcadas son mediante el empleo de las funciones generatrices, técnicas de programación dinámica, métodos de enumeración o los métodos de Monte Carlo [53].

2.1.2. Gestión de recursos en la contención de incendios forestales

El segundo grupo de problemas pertenecen al campo de la optimización lineal entera mixta. En la actualidad, muchos de los problemas de logística, tanto en el ámbito público como privado, son abordados desde

el punto de vista de la optimización. Esto es debido a la versatilidad que tiene esta disciplina a la hora de añadir restricciones importantes en la toma de decisiones y al creciente deseo de minimizar costes, tiempos...

La historia de la lucha contra los incendios forestales por parte de las administraciones tiene sus orígenes a finales del siglo XIX, con la aparición de los primeros parques nacionales en Estados Unidos. Tras establecerse el Parque Nacional de Yellowstone en 1872 como el primer parque nacional del mundo, la administración del parque asignó al ejército de Estados Unidos la responsabilidad de su protección. Con su llegada al parque, detectaron que se producían gran cantidad de incendios en él y que se debía de decir cómo proceder a su control al no haber soldados suficientes. En ese momento se creó una política de extinción de incendios que posteriormente se aplicaría al resto de parques naturales.

Varios eventos catastróficos en los Estados Unidos, como los incendios de Peshtigo, el del Cañón de Santiago y especialmente el Gran Incendio de 1910 contribuyeron a la creencia de que el incendio era un gran peligro contra el que había que luchar.

La repetición de sucesos de gravedad, como los anteriormente mencionados a lo largo del siglo XX, convencieron a las autoridades de la necesidad de diseñar estrategias para controlar y extinguir los incendios, así como priorizar la seguridad y protección de los recursos de extinción (brigadas, vehículos contra incendios, helicópteros y aviones de extinción...). Es por ello que se incrementó la búsqueda de operaciones eficientes que garantizaran la seguridad de las vidas humanas (establecer zonas de seguridad, rutas de escape...).

En la actualidad, debido a los nuevos avances tecnológicos que proporcionan ordenadores más potentes y redes de comunicación más rápidas y seguras, se ve la necesidad de realizar una gestión más eficiente de los recursos involucrados en la extinción de incendios forestales mediante técnicas de optimización y simulación.

2.2. Hipótesis y objetivos específicos

Los trabajos presentados en la tesis abordarán una serie de objetivos específicos. Estos perseguirán facilitar la toma de decisiones en problemas del mundo real mediante el planteamiento y resolución de los distintos problemas propuestos. A continuación se procederá a enunciar los objetivos específicos de la tesis y los trabajos en los que se acometen.

El trabajo presentado en la Sección 5.1 tiene por objetivo el cálculo eficiente de los índices de poder de Banzhaf-Coleman y Owen para juegos de mayoría ponderada con configuración de coaliciones. Además se extiende este objetivo a una clase más amplia de juegos, los juegos de mayoría ponderada múltiple con configuración de coaliciones. Para ello, se presentan cuatro algoritmos que hacen uso de las funciones generatrices, realizando la programación de los mismos en el lenguaje abierto R e ilustrando el procedimiento propuesto con un ejemplo de la vida real tomado de las ciencias sociales.

Los siguientes trabajos persiguen la búsqueda de soluciones en problemas de gestión de recursos en la contención de incendios forestales. Dentro de este campo, se presentan distintos problemas de gestión. El primero de ellos consiste en la Selección y Asignación temporal de Recursos para la Contención de un incendio forestal (SARC). Este problema tiene como objetivo facilitar la planificación del uso de los recursos involucrados en la contención de un incendio. Todo ello teniendo en cuenta el cumplimiento de la normativa española de no negligencia de frentes y periodos de descanso para pilotos y brigadas. Para abordar este objetivo se presenta en la Sección 5.2 un modelo de programación lineal entera para ayudar en la toma de decisiones. El modelo propuesto es programado utilizando el lenguaje R, facilitando su uso mediante la creación de una interfaz, la cual facilita la inclusión de datos, resolución y análisis de los resultados. Además, se realiza un estudio de simulación para analizar la viabilidad del modelo propuesto y se ilustra el uso del mismo mediante la definición de un ejemplo inspirado en una situación real.

Pese a que el estudio de simulación realizado en la Sección 5.2 arroja buenos tiempos de resolución, se consideró importante mejorarlos. En la actualidad, el tiempo empleado para la toma de decisiones en el contexto expuesto es sumamente importante, pues una respuesta lenta podría de-

rivar en una rápida expansión del incendio. Para superar esa limitación, en el trabajo expuesto en la Sección 5.3 se estudia y aplica un conjunto de técnicas de descomposición al modelo presentado anteriormente (Sección 5.2), con el objetivo de reducir los tiempos de resolución.

Los otros dos problemas a los que se les da solución en esta tesis consisten en la Asignación de Aeronaves a Rutas de Vuelo (AARV) y la Asignación de Aeronaves a Puntos de Repostaje (AAPR). Las actividades de contención de incendios forestales involucran una combinación de decisiones importantes que afectan a la evolución del incendio y el despliegue efectivo de recursos. Cuando se utilizan recursos aéreos (en particular aviones y helicópteros), surgen dos tareas: la asignación de recursos aéreos a las rutas de vuelo (trayectorias circulares que siguen los recursos aéreos de manera que tienen puntos de carga y descarga comunes) y la asignación de recursos aéreos a los puntos de repostaje. En el trabajo presentado en la Sección 5.4, se presentan dos modelos de programación lineal entera para resolver estas dos problemas. Los modelos están escritos con AMPL y se ilustran con ejemplos inspirados en la vida real. El objetivo de estos modelos es proporcionar un soporte automático y rápido para la coordinación de las tareas mencionadas. Para potenciar la robustez de los modelos, también se consideran los tiempos de programación y las características de los recursos aéreos. Estos modelos tienen como objetivo minimizar tanto el tiempo de contención del incendio como las horas totales de vuelo. Los modelos reducirán el riesgo de colisión aérea de recursos teniendo en cuenta el número máximo de recursos aéreos que pueden cargar retardantes simultáneamente en el mismo punto. Además, también permitirá mejorar la gestión de los puntos de repostaje de combustible para las aeronaves.

Por último, se plantea un objetivo final, el cual recoge la coordinación de todas estas herramientas para la gestión de los recursos en la contención de incendios forestales. En el trabajo presentado en la Sección 5.5 se define un esquema que determina la relación existente entre los modelos. Con ello se persigue la creación de una herramienta integral que permita mejorar la gestión de los recursos apoyándose en los modelos propuestos.

Capítulo 3

Herramientas metodológicas

En este capítulo se realiza una descripción de las herramientas metodológicas empleadas.

3.1. Índices de poder

Para poder establecer qué es un índice de poder será necesario introducir conceptos básicos de teoría de juegos cooperativos con utilidad transferible, y en concreto de los juegos simples.

A continuación, con el objetivo de contextualizar el trabajo presentado en la Sección 5.1, se definirá lo que es un juego con utilidad transferible. Posteriormente se estudiará la subclase de los juegos simples, y dentro de ella, los juegos de mayoría ponderada. Sobre los juegos de mayoría ponderada se definirán dos de las soluciones más empleadas, el índice de poder de Shapley-Shubik y el de Banzhaf-Coleman. Por último se nutrirá a los juegos de mayoría ponderada de una configuración de coaliciones para terminar de asentar las bases del trabajo realizado.

Definición 3.1. Un juego cooperativo con *utilidad transferible* (*TU*) es un par (N, v) donde $N = \{1, \dots, n\}$ es el conjunto de jugadores y $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ es la *función característica* del juego que verifica que $v(\emptyset) = 0$, siendo 2^N el conjunto de todos los subconjuntos de N .

Dada una coalición $S \subset N$, $v(S)$ representa el pago que se pueden asegurar los jugadores de S independientemente de cómo actúe el resto.

Al conjunto de todos los juegos cooperativos con utilidad transferible y conjunto de jugadores N , se le denotará por $TU(N)$. Además, se puede ver como un espacio vectorial con las operaciones internas de suma de juegos y producto de un juego por un escalar tal y como se describe a continuación. Sean $v_1, v_2 \in TU(N)$, $S \subset N$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

Suma de juegos: $(v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$.

Producto de un juego por un escalar: $(\lambda v_1)(S) = \lambda v_1(S)$.

A continuación, se introducirá qué es un juego simple, para posteriormente definir la clase de juegos de mayoría ponderada.

Definición 3.2. Un juego $(N, v) \in TU(N)$ se dice que es *simple* si:

- (i) Para todo $S \subset N$, $v(S) = 0$ o $v(S) = 1$,
- (ii) $v(N) = 1$,
- (iii) Para cualquier $S, T \subset N$, tal que $S \subset T$, $v(S) \leq v(T)$ (juego monótono).

Se denotará por $SI(N)$ al conjunto de juegos simples con conjunto de jugadores N .

Dado un juego simple (N, v) , se dice que la coalición S es ganadora si $v(S) = 1$. En caso contrario, se dice que la coalición S es perdedora.

Definición 3.3. Sea un juego $(N, v) \in SI(N)$. El *conjunto de coaliciones ganadoras* está dado a continuación,

$$W(N, v) := \{S \subset N : v(S) = 1\}.$$

Dentro de los juegos simples una de las clases de mayor estudio es la de los juegos de mayoría ponderada, por representar situaciones sociales como la de los órganos de votación.

Definición 3.4. Un *juego de mayoría ponderada* es un juego simple $(N, v) \in SI(N)$ donde cada jugador $i \in N$ tiene un peso $w_i \in \mathbb{R}^+$ y

existe una cuota $q \in \mathbb{N}$ ($q > 0$) que determina cuando una coalición es o no ganadora, i.e.,

$$\forall S \subset N, v(S) := \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i \in S} w_i \geq q, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De forma abreviada se podrá denotar al juego de mayoría ponderada con $N = \{1, \dots, n\}$ como $[q; w_1, \dots, w_n]$.

Además, una clase más amplia sería la de los juegos de mayoría ponderada múltiple. El trabajo que se presenta en la Sección 5.1 muestra resultados sobre esta nueva clase de problemas, muy presente en la política actual. Para su definición, se introducirá primero el siguiente juego simple.

Definición 3.5. Dados m juegos simples $(N, v_1), \dots, (N, v_m) \in SI(N)$, el juego simple $(N, v_1 \wedge \dots \wedge v_m)$ viene dado para todo $S \subset N$ por:

$$\begin{aligned} (v_1 \wedge \dots \wedge v_m)(S) &:= \min\{v_1(S), \dots, v_m(S)\} = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \forall j = 1, \dots, m, v_j(S) = 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Definición 3.6. Un *juego de mayoría ponderada múltiple* es un juego simple $(N, v_1 \wedge \dots \wedge v_m)$ donde (N, v_j) es el juego de mayoría ponderada definido por $[q^j; w_1^j, \dots, w_n^j]$ para $1 \leq j \leq m$. En el juego $(N, v_1 \wedge \dots \wedge v_m)$, una coalición $S \subset N$ es ganadora si y solo si S es ganadora en (N, v_j) para todo $1 \leq j \leq m$. Por tanto,

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_m)(S) := \begin{cases} 1 & \text{si } \forall j = 1, \dots, m, \sum_{i \in S} w_i^j \geq q^j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Soluciones puntuales

En los juegos cooperativos se suelen proponer dos tipos de soluciones: soluciones de tipo conjunto (como el núcleo [39]) o de tipo puntual. Puesto que los índices de poder son soluciones de tipo puntual, en esta sección únicamente se abordarán de forma introductoria las soluciones

puntuales.

Definición 3.7. Una *solución puntual*, también llamada *valor*, sobre $TU(N)$, es una aplicación

$$f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

que a cada juego $(N, v) \in TU(N)$ le asigna un vector de \mathbb{R}^n cuya componente i -ésima representa el pago que se le asigna al jugador i .

A continuación se mencionarán algunas de las propiedades más importantes que se suelen exigir a las soluciones puntuales de los juegos TU.

Eficiencia: Una solución f es eficiente si para todo juego $(N, v) \in TU(N)$ se satisface

$$\sum_{i \in N} f_i(N, v) = v(N).$$

La propiedad de eficiencia indica que f debe repartir $v(N)$ entre todos los jugadores.

Poder total: Una solución f satisface la propiedad de poder total si para todo juego $(N, v) \in TU(N)$ se satisface

$$\sum_{i \in N} f_i(N, v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i \in N} \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

La propiedad de poder total establece que el pago total obtenido debe ser la suma de las medias de las contribuciones marginales de los jugadores.

Jugador nulo: Una solución f satisface la propiedad de jugador nulo si para todo juego $(N, v) \in TU(N)$ y para todo jugador nulo $i \in N$ en (N, v) ,¹ se tiene que

$$f_i(N, v) = 0.$$

¹ $i \in N$ es un *jugador nulo* en $(N, v) \in TU(N)$ si $v(S \cup \{i\}) = v(S), \forall S \subset N \setminus \{i\}$.

Simetría: Una solución f satisface la propiedad de simetría si para todo juego $(N, v) \in TU(N)$ y para cualquier par de jugadores simétricos $i, j \in N$ en (N, v) ,² se satisface que

$$f_i(N, v) = f_j(N, v).$$

Aditividad: Una solución f satisface la propiedad de aditividad si para todo para de juegos $(N, v_1), (N, v_2) \in TU(N)$ se verifica que

$$f(N, v_1 + v_2) = f(N, v_1) + f(N, v_2).$$

Lo interesante de estas propiedades es que mediante el uso de un subconjunto de las mismas, Shapley en 1953 [76] y posteriormente Feltkamp en 1995 [33], realizaron las caracterizaciones que se describen a continuación del valor de Shapley y Banzhaf respectivamente.³

Teorema 3.8. *El único valor para los juegos de $TU(N)$ que verifica las propiedades de eficiencia, jugador nulo, simetría y aditividad es el valor de Shapley. Dado un juego $(N, v) \in TU(N)$ y un jugador $i \in N$ el valor de Shapley viene dado por,*

$$\phi_i(N, v) := \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

Teorema 3.9. *El único valor para los juegos de $TU(N)$ que verifica las propiedades de poder total, jugador nulo, simetría y aditividad es el valor de Banzhaf. Dado un juego $(N, v) \in TU(N)$ y un jugador $i \in N$ el valor de Banzhaf viene dado por,*

$$\beta_i(N, v) := \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{n-1}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

²Dos jugadores $i, j \in N$ son simétricos en (N, v) si para cualquier $S \subset N \setminus \{i, j\}$ $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

³En realidad Shapley trabajó con una propiedad denominada de soporte que agrega las propiedades de eficiencia y jugador nulo, las cuales se usan aquí para mayor claridad.

En los juegos TU, de forma general, parece natural exigir la propiedad de eficiencia, ya que es una forma adecuada de distribuir los costes o beneficios. Sin embargo, cuando se habla de juegos de votación, no se piensa en cómo se debe repartir el poder, sino que el interés radica en un índice que indique el poder que tiene cada jugador dentro del órgano de votación. Es por ello que las soluciones puntuales en los juegos simples y por ende de mayoría ponderada se denominan índices de poder.

Definición 3.10. Un *índice de poder* sobre $SI(N)$, con $n = |N|$, es una aplicación

$$f : SI(N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

que a cada juego $(N, v) \in SI(N)$ le asigna un vector de \mathbb{R}^n cuya componente i -ésima representa el poder que se le asigna al jugador i .

Aunque los juegos simples están dentro de la clase de los juegos TU, no todas las propiedades que se definieron sobre las soluciones tienen sentido dentro de esta nueva clase de juegos. Por ejemplo, la suma de dos juegos simples no da lugar a un juego simple, por lo que la aditividad no tiene cabida en el contexto de estos juegos. Es por ello que surge la propiedad de transferencia o aditividad para juegos simples.

La propiedad de transferencia se apoya en la definición de dos juegos simples, la intersección de juegos simples (Definición 3.5) y la unión de juegos simples, la cual se define a continuación.

Definición 3.11. Dados m juegos simples $(N, v_1), \dots, (N, v_m) \in SI(N)$, el juego simple $(N, v_1 \vee \dots \vee v_m)$ viene dado para todo $S \subset N$ por,

$$\begin{aligned} (v_1 \vee \dots \vee v_m)(S) &:= \max\{v_1(S), \dots, v_m(S)\} = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \exists j = 1, \dots, m : v_j(S) = 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Transferencia: Un índice de poder f satisface la propiedad de transferencia si para todo par de juegos $(N, v_1), (N, v_2) \in SI(N)$ se verifica que $f(N, v_1) + f(N, v_2) = f(N, v_1 \vee v_2) + f(N, v_1 \wedge v_2)$.

Con la propiedad de transferencia, introducida por Dubey en 1975 [31], el propio Dubey en dicho artículo realizó una caracterización del índice de Shapley-Shubik y posteriormente, junto a Shapley, del índice de

Banzhaf-Coleman [32].

Además, como en juegos simples $v(S) = 1$ si $S \in W(N, v)$ (donde $W(N, v)$ era el conjunto de coaliciones ganadoras, Definición 3.3) y $v(S) = 0$ en otro caso. Se tiene que $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 1$ si el jugador i hace ganador a S . Con esta idea surge el concepto de *swing*.

Definición 3.12. Sea un juego $(N, v) \in SI(N)$ y un jugador $i \in N$. Un *swing* para i es una coalición $S \subset N \setminus \{i\}$ tal que $S \notin W(N, v)$ y $S \cup \{i\} \in W(N, v)$.

Al conjunto de todos los swings del jugador i , se le denotará por $S(i)$.

Por tanto, con la idea de swing y con la propiedad de transferencia, se pueden reformular y caracterizar los índices de Shapley-Shubik y Banzhaf-Coleman de la siguiente forma.

Teorema 3.13. *El único índice de poder sobre $SI(N)$ que verifica las propiedades de transferencia, jugador nulo, simetría y eficiencia es el índice de Shapley-Shubik. Dado un juego $(N, v) \in SI(N)$ e $i \in N$, se define el índice de poder de Shapley-Shubik como,*

$$\phi_i(N, v) := \sum_{S \in S(i)} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!}.$$

Teorema 3.14. *El único índice de poder sobre $SI(N)$ que verifica las propiedades de transferencia, jugador nulo, simetría y poder total es el índice de Banzhaf-Coleman. Dado un juego $(N, v) \in SI(N)$ e $i \in N$, se define el índice de poder de Banzhaf-Coleman como,*

$$\beta_i(N, v) := \sum_{S \in S(i)} \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Juegos con uniones a priori y configuración de coaliciones

En los modelos considerados hasta el momento se permitía realizar cualquier tipo de unión entre jugadores para formar coaliciones. Sin embargo, en la vida real esto no sucede, ya que debido a razones familiares, políticas o económicas unos jugadores pueden tener más afinidad para coaligarse con unos jugadores que con otros. Para modelar este tipo de

situaciones surgen los juegos TU con uniones a priori (también conocidos como juegos TU con estructura de coaliciones), donde la comunicación de los jugadores se ve restringida. Por ejemplo, en un parlamento los parlamentarios se agrupan de manera natural en partidos políticos distintos, los cuales a su vez se unen de acuerdo a sus ideologías.

Definición 3.15. Un juego TU con un sistema de uniones es una terna (N, v, \mathcal{P}) donde $(N, v) \in TU(N)$ y $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_m\}$ es una partición de N .

Se denotará por $U(N)$ al conjunto de juegos TU con uniones a priori y conjunto de jugadores N .

En 1977, Owen propuso y caracterizó el valor de Shapley para juegos cooperativos con un sistema de uniones a priori. A este nuevo valor se le denomina valor de Owen [63]. Otras caracterizaciones del valor de Owen se pueden encontrar en [18], [84] o [20]. Además, Owen en 1981 también propuso la extensión del índice de Banzhaf-Coleman, que se denomina índice de Banzhaf-Owen [60]. Sin embargo, caracterizaciones de este nuevo valor no surgieron hasta los trabajos de Albizuri (2001) [1] y de Amer, Carreras y Giménez (2002) [8].

Para facilitar la escritura del valor de Owen y Banzhaf-Owen, dado un juego con uniones a priori $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$ y un jugador $i \in N$, se denotará por $P^i \in \mathcal{P}$ a la coalición a la que pertenece el jugador i .

Definición 3.16. Dado un juego $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$, se define el *valor de Owen* para todo jugador $i \in N$ como,

$$\phi_i(N, v, \mathcal{P}) = \sum_{R \subset \mathcal{P} \setminus \{P^i\}} \sum_{T \subset P^i \setminus \{i\}} g(P^i, R, T) (v(Q_{RT} \cup \{i\}) - v(Q_{RT})),$$

siendo,

$$Q_{RT} = \left(\bigcup_{P_k \in R} P_k \right) \bigcup T,$$

y

$$g(P^i, R, T) = \frac{|R|!(|\mathcal{P}| - |R| - 1)!}{|\mathcal{P}|!} \frac{|T|!(|P^i| - |T| - 1)!}{|P^i|!}.$$

Definición 3.17. Dado un juego $(N, v, \mathcal{P}) \in U(N)$, se define el *valor de*

Banzhaf-Owen para todo jugador $i \in N$ como,

$$\beta_i(N, v, \mathcal{P}) = \sum_{R \subset \mathcal{P} \setminus \{P^i\}} \sum_{T \subset P^i \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{|\mathcal{P}| + |P^i| - 2}} (v(Q_{RT} \cup \{i\}) - v(Q_{RT})).$$

Sin embargo los juegos con uniones a priori podrían no ser suficientes para representar situaciones de la vida real. En un gran número de ocasiones, un jugador no tiene por qué tener afinidad con un único grupo, sino que puede tener afinidad con más de uno por diversos motivos, tales como ideología política, preferencias geográficas... Es por ello que la clase de juegos con uniones a priori se puede ampliar a la clase de juegos con configuración de coaliciones, donde el conjunto de coaliciones no tiene por qué ser una partición del conjunto de jugadores sino un recubrimiento finito del mismo.

Definición 3.18. Una *configuración de coaliciones* de N es una colección finita de coaliciones de N cuya unión es N , i.e., $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ es una configuración de coaliciones si,

$$\bigcup_{C_k \in \mathcal{C}} C_k = N.$$

Definición 3.19. Un *juego TU con configuración de coaliciones* es una terna (N, v, \mathcal{C}) donde $(N, v) \in TU(N)$ y $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ es una configuración de coaliciones.

Se denotará por $CC(N)$ al conjunto de juegos TU con configuración de coaliciones y conjunto de jugadores N . En este contexto, se centrará el estudio en resultados para los juegos simples con configuración de coaliciones, denotando al conjunto de dichos juegos por $SC(N)$.

En 2006, Albizuri y Aurrekoetxea [3] y Albizuri, Aurrekoetxea y Zarzuelo [2] proponen el índice de Banzhaf-Coleman generalizado y el valor de configuración, para los juegos simples y juegos TU, respectivamente, con una configuración de coalición. Estas reglas generalizan el índice de poder de Banzhaf-Coleman y el valor de Owen, respectivamente.

De forma similar a la presentada para el caso de juegos con uniones a priori, para facilitar la escritura del índice con configuración y del índice de Banzhaf-Coleman generalizado, dado un juego con una configuración

de coalición $(N, v, \mathcal{C}) \in CC(N)$ y un jugador $i \in N$, se denotará por C^i al conjunto de coaliciones a los que pertenece el jugador i , i.e. $C^i = \{C_k \in \mathcal{C} : i \in C_k\}$.

Definición 3.20. Dado un juego $(N, v, \mathcal{C}) \in CC(N)$, se define el valor con configuración para todo jugador $i \in N$ como,

$$\phi_i(N, v, \mathcal{C}) = \sum_{R \subset \mathcal{C} \setminus C^i} \sum_{C_k \in C^i} \sum_{T \subset C_k \setminus \{i\}} g(C_k, R, T) \left(v(\hat{Q}_{RT} \cup \{i\}) - v(\hat{Q}_{RT}) \right),$$

siendo,

$$\hat{Q}_{RT} = \left(\bigcup_{C_l \in R} C_l \right) \cup T,$$

y

$$g(C_k, R, T) = \frac{|R|!(|\mathcal{C}| - |R| - 1)! |T|!(|C_k| - |T| - 1)!}{|\mathcal{C}|! |C_k|!}.$$

Definición 3.21. Dado un juego $(N, v, \mathcal{C}) \in SC(N)$, se define el índice de Banzhaf-Coleman generalizado para todo jugador $i \in N$ como,

$$\beta_i(N, v, \mathcal{C}) = \sum_{R \subset \mathcal{C} \setminus C^i} \sum_{C_k \in C^i} \sum_{T \subset C_k \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{|\mathcal{C}| + |C_k| - 2}} \left(v(\hat{Q}_{RT} \cup \{i\}) - v(\hat{Q}_{RT}) \right).$$

En la Figura 3.1 se presenta un esquema de los resultados vistos hasta ahora en esta sección. En ella, se pueden distinguir tres columnas, en las que se posicionan los resultados pertenecientes a los juegos TU sin restricción en la comunicación, juegos con uniones a priori y juegos con configuración de coaliciones, respectivamente. En color gris se muestran los resultados relativos a los juegos TU, mientras que en color blanco se presentan los resultados en juegos simples. Por último, indicar que la forma de las cajas con esquinas redondeadas indica dónde se definió la solución, mientras que a las que les falta la esquina superior derecha muestran dónde se presentaron caracterizaciones de la solución asociada.

En la Figura 3.1 se destacan los siguientes trabajos: Shapley (1953) [76], Owen (1977) [63], Albizuri, Aurrecoechea y Zarzuelo (2006) [2], Shapley y Shubik (1954) [77], Dubey (1975) [31], Banzhaf III (1965) [11], Coleman (1971) [24], Dubey y Shapley (1979) [32], Owen (1981) [60], Albizuri

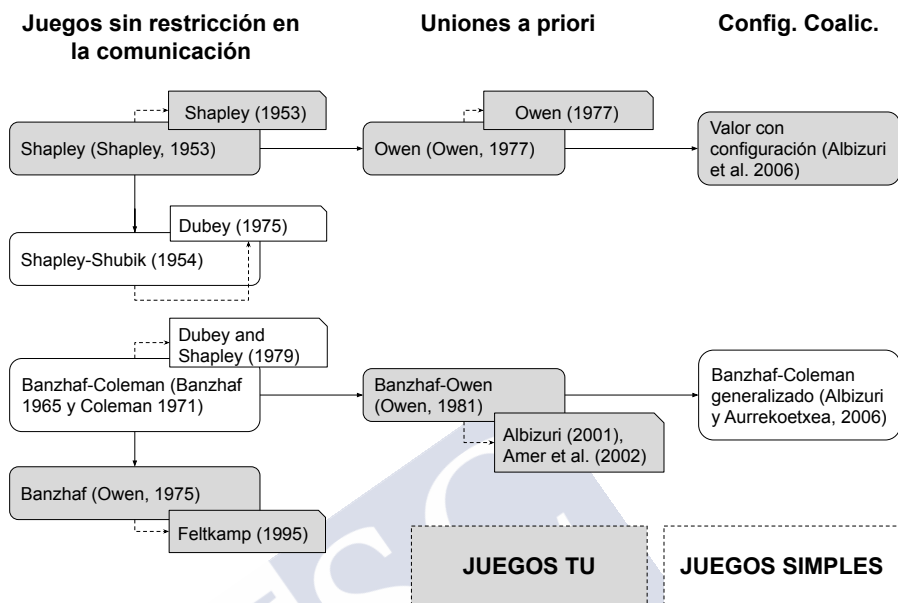


Figura 3.1: Evolución histórica de los valores e índices de poder.

(2001) [1], Amer, Carreras y Giménez (2002) [8], Albizuri y Aurrekoetxea (2006) [3], Owen (1975) [61] y Feltkamp (1995) [33].

El trabajo expuesto en la Sección 5.1 muestra resultados teóricos para el cálculo del índice con configuración y del índice de Banzhaf-Coleman generalizado en juegos de mayoría ponderada y mayoría ponderada múltiple con configuración de coaliciones.

El cálculo de índices de poder en juegos simples de mayoría ponderada se puede simplificar mediante el uso de las funciones generatrices. Un método de análisis combinatorio que facilita el cálculo para contabilizar el número de elementos de un conjunto finito. Esta técnica, pese a no poder emplearse en todo tipo de juegos, es ampliamente empleada en juegos simples de mayoría ponderada. Ejemplos de ello son el trabajo pionero de David Cantor [48] para el índice de poder de Shapley-Shubik, o los trabajos de Brams y Affuso [19] y Alonso-Meijide [6].

Definición 3.22. Dada una sucesión $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de números reales, la serie

$$f_a(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j x^j,$$

se denomina *función generatriz* de la sucesión $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, pudiendo ser finita o infinita.

En la serie $f_a(x)$ la variable x no tiene significado propio y únicamente sirve para identificar cada a_j como el coeficiente de x^j en su desarrollo. Además, su uso se puede extender al empleo de distintos grupos de características, considerando en este caso, tantas variables como grupos de características haya. Si se suponen tres grupos de características, se puede plantear la función generatriz asociada a la sucesión $\{a_{jkl}\}_{j,k,l \in \mathbb{N}}$ como,

$$f_a(x, y, z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{l \in \mathbb{N}} a_{jkl} x^j y^k z^l.$$

Para analizar en detalle los fundamentos teóricos de las funciones generatrices se puede consultar el trabajo de Ríbnikov y Medkov [67].

Funciones generatrices en juegos de mayoría ponderada

En la Sección 3.1 se enunció la definición de un juego de mayoría ponderada (Definición 3.4) y la definición de un swing (Definición 3.12).

Para mejorar la notación, para un juego de mayoría ponderada $(N, v) \in SI(N)$ dado por $[q; w_1, \dots, w_n]$, y para cualquier $S \subset N$, se denotará,

$$w(S) := \sum_{i \in S} w_i.$$

El índice de Shapley-Shubik para un juego simple de mayoría ponderada, (N, v) dado por $[q; w_1, \dots, w_n]$, se puede reescribir en función del número de swings para el jugador $i \in N$ en coaliciones de tamaño r . Siguiendo la fórmula para el cálculo del índice de Shapley-Shubik para juegos simples presentada en el Teorema 3.13 se tiene que,

$$\phi_i(N, v) = \sum_{S \in S(i)} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{r!(n - r - 1)!}{n!} \sigma_r^i(N, v),$$

donde $\sigma_r^i(N, v)$ representa el número de swings para el jugador i que tienen cardinal r en el juego (N, v) . El índice así expresado, se podrá calcular mediante el resultado expuesto en la siguiente proposición.

Proposición 3.23. *Sea (N, v) un juego simple de mayoría ponderada dado por $[q; w_1, \dots, w_n]$. El número de swings del jugador $i \in N$ con cardinal r es igual a*

$$\sigma_r^i(N, v) = \sum_{k=q-w_i}^{q-1} \nu_{k,r}^i,$$

siendo $\nu_{k,r}^i = |\{S \subset N : i \notin S, w(S) = k \text{ and } |S| = r\}|$.

El siguiente resultado, de David G. Cantor (se puede ver en [48]), proporciona la función generatriz de la sucesión $\{\nu_{k,r}^i\}_{k,r \in \mathbb{N}}$.

Proposición 3.24. *Sea (N, v) un juego simple de mayoría ponderada dado por $[q; w_1, \dots, w_n]$. La función generatriz de los números $\{\nu_{k,r}^i\}_{k,r \in \mathbb{N}}$ definidos en la Proposición 3.23 viene dada por,*

$$G_i^\phi(x, z) = \prod_{j=1, j \neq i}^n (1 + x^{w_j} z).$$

De la proposición anterior se deduce que,

$$\begin{aligned} G_i^\phi(x, z) &= \prod_{j=1, j \neq i}^n (1 + x^{w_j} z) \\ &= (1 + x^{w_1} z) \cdots (1 + x^{w_{i-1}} z)(1 + x^{w_{i+1}} z) \cdots (1 + x^{w_n} z) \\ &= \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \prod_{j \in S} x^{w_j} z \\ &= \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} x^{w(S)} z^{|S|} \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{w(N \setminus \{i\})} \nu_{k,r}^i x^k \right] z^r. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores de $\nu_{k,r}^i$ se identificarán como los coeficientes

de $x^k z^r$ al desarrollar $G_i^\phi(x, z)$. Solo son de interés, debido a la Proposición 3.23, los coeficientes ν_k^i asociados a x^k con $q - w_i \leq k \leq q - 1$.

A continuación, se ilustrará el cálculo del índice de Shapley-Shubik haciendo uso de las funciones generatrices con un ejemplo.

Ejemplo 3.25. *Considérese $N = \{1, 2, 3, 4\}$ como el conjunto de jugadores y un juego de mayoría ponderada representado por $[3; 2, 2, 1, 1]$. Si se considera el jugador 1, siguiendo la Proposición 3.24,*

$$\begin{aligned} G_1^\phi(x, z) &= \prod_{j=2}^4 (1 + x^{w_j} z) \\ &= (1 + x^2 z)(1 + xz)(1 + xz) \\ &= x^4 z^3 + 2x^3 z^2 + x^2 z^2 + x^2 z + 2xz + 1. \end{aligned}$$

Por la Proposición 3.23, los sumandos de interés son aquellos que tienen el exponente de x entre $q - w_i = 1$ y $q - 1 = 2$. Los sumandos a considerar son $x^2 z^2$, $x^2 z$ y $2xz$. Por lo tanto, teniendo en cuenta el grado de z ,

$$\begin{aligned} \sigma_0^1(N, v) &= \sum_{k=1}^2 \nu_{k,0}^1 = 0, \\ \sigma_1^1(N, v) &= \sum_{k=1}^2 \nu_{k,1}^1 = 1 + 2 = 3, \quad \leftarrow (x^2 z, 2xz) \\ \sigma_2^1(N, v) &= \sum_{k=1}^2 \nu_{k,2}^1 = 1, \quad \leftarrow (x^2 z^2) \\ \sigma_3^1(N, v) &= \sum_{k=1}^2 \nu_{k,3}^1 = 0. \end{aligned}$$

El índice de Shapley-Shubik para el jugador 1 se calcula como

$$\phi_1(N, v) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{r!(n-r-1)!}{n!} \sigma_r^1(N, v) = \frac{1!2!}{4!} 3 + \frac{2!1!}{4!} = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

El índice para los otros jugadores se obtiene de forma análoga.

Para el cálculo del índice de Banzhaf-Coleman para un juego simple de mayoría ponderada, (N, v) dado por $[q; w_1, \dots, w_n]$, el procedimiento es similar al seguido con el índice de Shapley-Shubik, salvo que en este caso no es necesario tener en cuenta el tamaño de las coaliciones.

La siguiente proposición determina para un juego simple de mayoría ponderada el número de swings de un jugador.

Proposición 3.26. *Sea (N, v) un juego simple de mayoría ponderada dado por $[q; w_1, \dots, w_n]$. El número de swings del jugador $i \in N$ es igual a*

$$\sigma^i(N, v) = \sum_{k=q-w_i}^{q-1} \nu_k^i,$$

siendo $\nu_k^i = |\{S \subset N : i \notin S \text{ and } w(S) = k\}|$.

Teniendo en cuenta la proposición anterior, se puede reescribir el índice de Banzhaf-Coleman en función del número de swings (empleando la expresión presentada en el Teorema 3.14) del jugador $i \in N$ como,

$$\beta_i(N, v) = \sum_{S \in S(i)} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\sigma^i(N, v)}{2^{n-1}}.$$

Con estos resultados, Brams y Affuso [19], proporcionan el cálculo del índice de poder de Banzhaf-Coleman, para todo jugador, en un juego de mayoría ponderada mediante el uso de funciones generatrices. Esto lo realizan mediante la definición de la función generatriz que permite el cálculo de los números $\{\nu_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Proposición 3.27. *Sea (N, v) un juego simple de mayoría ponderada dado por $[q; w_1, \dots, w_n]$. La función generatriz de los números $\{\nu_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$ definidos en la Proposición 3.26 viene dada por,*

$$G_i^\beta(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n (1 + x^{w_j}).$$

De la proposición anterior se puede deducir que,

$$\begin{aligned}
 G_i^\beta(x) &= \prod_{j=1, j \neq i}^n (1 + x^{w_j}) \\
 &= (1 + x^{w_1}) \cdots (1 + x^{w_{i-1}})(1 + x^{w_{i+1}}) \cdots (1 + x^{w_n}) \\
 &= \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \prod_{j \in S} x^{w_j} \\
 &= \sum_{\substack{S \subset N \setminus \{i\} \\ w(N \setminus \{i\})}} x^{w(S)} \\
 &= \sum_{k=0} \nu_k^i x^k.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores de ν_k^i se identificarán como los coeficientes de x^k al desarrollar $G_i^\beta(x)$. Son únicamente de interés, debido a la Proposición 3.26, los coeficientes ν_k^i asociados a x^k con $q - w_i \leq k \leq q - 1$.

Para facilitar la comprensión del cálculo del índice de Banzhaf-Coleman mediante funciones generatrices se incluye el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.28. *Considérese $N = \{1, 2, 3, 4\}$ como el conjunto de jugadores y un juego de mayoría ponderada representado por $[3; 2, 2, 1, 1]$. Si se considera el jugador 1, siguiendo la Proposición 3.27,*

$$G_1^\beta(x) = \prod_{j=2}^4 (1 + x^{w_j}) = (1 + x^2)(1 + x)(1 + x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1.$$

Por la Proposición 3.26 los sumandos de interés son aquellos que tienen el exponente de x entre $q - w_i = 1$ y $q - 1 = 2$. Estos sumandos son $2x^2$ y $2x$. Por lo tanto,

$$\sigma^1(N, v) = \sum_{k=1}^2 \nu_k^1 = 4,$$

y el índice de Banzhaf-Coleman para el jugador 1,

$$\beta_1(N, v) = \frac{\sigma^1(N, v)}{2^{n-1}} = \frac{4}{8} = 0,5.$$

El índice para los otros jugadores se puede calcular de forma análoga.

Los resultados presentados hasta ahora son para juegos simples de mayoría ponderada sin restricciones en la comunicación. De forma similar, Alonso-Meijide y Bowles (2005) [6], extendieron los resultados a la clase de los juegos simples de mayoría ponderada con uniones a priori.

El trabajo presentado en la Sección 5.1 es a su vez una extensión del trabajo de Alonso-Meijide y Bowles, ampliando los resultados a la clase de los juegos simples de mayoría ponderada con configuración de coaliciones y a la clase de los juegos simples de mayoría ponderada múltiple con configuración de coaliciones.

3.2. Gestión de recursos en la contención de incendios forestales

Para la definición de los modelos matemáticos se trabajó con tres lenguajes de modelado algebraico (AML) diferentes: **AMPL** [36], el paquete **ROMO** [69] de **R** creado expresamente para el modelado de estos problemas y que permite modelar problemas de programación lineal en **R**, y la API de **Gurobi** [42] para **Python** [64]. Se comenzó desarrollando el código en **AMPL**, por ser un lenguaje de modelado sencillo, pero se abandonó su uso por no ser de licencia gratuita. Posteriormente, se desarrolló el paquete **ROMO**, de **R**, el cual facilita el modelado de problemas de programación lineal y entera en **R**. Por último, para el estudio de las técnicas de descomposición, Sección 5.3, se empleó la API de **Gurobi** para **Python**, cambiando el lenguaje de programación debido a la mayor rapidez de los códigos programados en **Python** frente a los de **R**.

Para resolver los problemas de programación matemática entera se emplearon los solvers **Gurobi**, **SYMPHONY** [23] y **lpSolve** [15].

Además, para mejorar los tiempos de resolución del problema **SARC** (trabajo presentado en la Sección 5.2) se realizó un estudio para analizar la eficiencia en la aplicación de distintas técnicas de descomposición sobre el problema matemático original. Las técnicas de descomposición empleadas fueron: la descomposición de Benders, la descomposición *branch and*

price y la descomposición lagrangiana. Se han elegido estas técnicas de descomposición por ser las más populares para tratar este tipo de problemas. En el Apéndice A se realiza una descripción introductoria de las técnicas de descomposición mencionadas. Una revisión de distintas técnicas de descomposición se puede ver en el libro de Conejo, Castillo, Minguez y col. [25]. Además, en la Sección 5.3 se define una reformulación del problema matemático **SARC** basándose en la técnica de descomposición de Benders que consigue mejorar de forma significativa los resultados obtenidos, y pudiendo por tanto, atacar problemas de mayor tamaño (mayor número de variables y restricciones) en tiempos razonables, teniendo en cuenta las limitaciones de tiempo para la resolución de los problemas.

Por último, indicar que para la introducción de los datos del problema **SARC**, su resolución y representación de sus resultados, se realizó una interfaz gráfica con el paquete **ShinyDashboard** [21] de R el cual emplea gráficos de **Plotly** [78] para la visualización y análisis de los resultados.

Capítulo 4

Discusión general

Con el ánimo de dotar de coherencia y unidad a los diferentes trabajos incluidos, realizamos una discusión general relativa a la investigación que conforma esta tesis.

4.1. Índices de poder

En 1944, John von Neumann y Oskar Morgenstern estudiaron la distribución del poder en los sistemas de votación, recogiendo los resultados en el libro *Theory of Games and Economic Behavior* [83]. Trataron con un juego simple, en concreto, un juego de mayoría ponderada, el cual resulta una abstracción de la maquinaria política constitucional que se encuentra detrás de un sistema de votación.

Posteriormente, los cálculos de los índices de poder utilizando datos reales se fueron generalizando y llegaron a presentarse como evidencia en los tribunales de justicia. Por ejemplo, los tribunales del estado de Nueva York han aceptado el índice Banzhaf-Coleman como una medida apropiada para los sistemas de votación ponderados. El cálculo, normalmente requiere de la ayuda de una computadora cuando involucra a muchos jugadores, como puede ser el caso en el que el conjunto de dichos jugadores esté formado por los condados de los EE. UU.

Incluso aunque haya pocos jugadores, para el cálculo de índices de poder, se deben analizar todas las coaliciones ganadoras y a medida que el número de jugadores aumenta también lo hace el tiempo de cómputo. Por ejemplo, el cálculo del índice de Shapley-Shubik mediante su definición, tiene complejidad temporal $O(n2^n)$ [30]. Es por eso, que se han desarrollado métodos para aproximar o calcular exactamente los índices de poder de forma más eficiente. Algunos de estos métodos son las extensiones multilineales, técnicas de programación dinámica, métodos de enumeración, métodos de Monte Carlo [53] o las funciones generatrices [48] para el caso de juegos simples de mayoría ponderada.

Puesto que el interés del trabajo presentado en la Sección 5.1 reside en el cálculo exacto de los índices en juegos de mayoría ponderada mediante el uso de funciones generatrices, se ha de destacar, en cuanto a los precedentes en la literatura, el trabajo realizado por David Cantor [48] para el cálculo del índice de poder de Shapley-Shubik, y el de Brams y Affuso [19] para el de Banzhaf-Coleman.

Posteriormente, Alonso-Meijide y Bowles [6] extendieron los resultados de los trabajos precedentes, a la clase de juegos de mayoría ponderada con uniones a priori, definiendo fórmulas de cálculo para el índice de Owen y el de Banzhaf-Owen (entre otros) mediante el uso de funciones generatrices.

El trabajo presentado en la Sección 5.1 extiende el trabajo de Alonso-Meijide y Bowles a la clase de los juegos simples de mayoría ponderada con configuración de coaliciones. En el trabajo, se definen nuevas fórmulas para el cálculo del índice con configuración e índice de Banzhaf-Coleman generalizado mediante el empleo de las ya mencionadas funciones generatrices. Además, se realiza una extensión a los juegos de mayoría ponderada múltiple [5] debido al interés que tienen estos modelos en determinados órganos de votación Europea [7]. Por ejemplo, el sistema de votación en el Consejo de la Unión Europea no es siempre el mismo, distinguiéndose los 3 siguientes procedimientos:

1. Mayoría simple.
2. Mayoría cualificada (o calificada).
3. Unanimidad.

La mayoría cualificada, es la forma habitual de votación. Este tipo de votación es usada cuando el Consejo toma decisiones durante el

procedimiento legislativo ordinario, también conocido como co-decisión. Aproximadamente el 80 % de toda la legislación de la Unión Europea se adopta con este procedimiento. Cuando el Consejo vota sobre una propuesta de la Comisión o del Alto Representante de la Unión para Asuntos Exteriores y Política de Seguridad, se alcanza una mayoría cualificada si se cumplen dos condiciones:

1. El 55 % de los Estados miembros vota a favor: en la práctica esto significa 16 de 28 (antes del Brexit).
2. La propuesta cuenta con el apoyo de estados miembros que representan al menos el 65 % de la población total de la UE.

En la actualidad, el uso de estos índices de poder tiene gran relevancia para hacer un análisis correcto del plano político.

4.2. Gestión de recursos en la contención de incendios forestales

España, el país con mayor masa forestal del Mediterráneo, está siendo en los últimos años uno de los países de la Unión Europea más afectados por los incendios forestales. Este problema es uno de los factores de amenaza más graves del patrimonio forestal del país, pues daña la integridad de bienes materiales y vidas humanas. Además, es un problema que amenaza con intensificarse debido a los efectos del cambio climático.

El informe realizado por el Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación (MAPA) en 2018 [40], recoge la gravedad de la situación. En la Figura 4.1 se muestran la distribución de los incendios ocurridos en España a lo largo del año 2018. Cabe destacar el gran número de incendios que suceden en la comunidad de Galicia, lo que pone de manifiesto la necesidad de hacer una buena gestión de los recursos para combatir los focos de manera eficiente.

En la última década, se produjeron una media de 12.573 siniestros al año, de los cuales, dos tercios se quedan en conatos.¹ Los conatos no producen daños importantes y las zonas que afectan suelen recuperarse de manera natural, sin embargo también son relevantes.

¹Incendios que afectan a una superficie inferior a una hectárea.

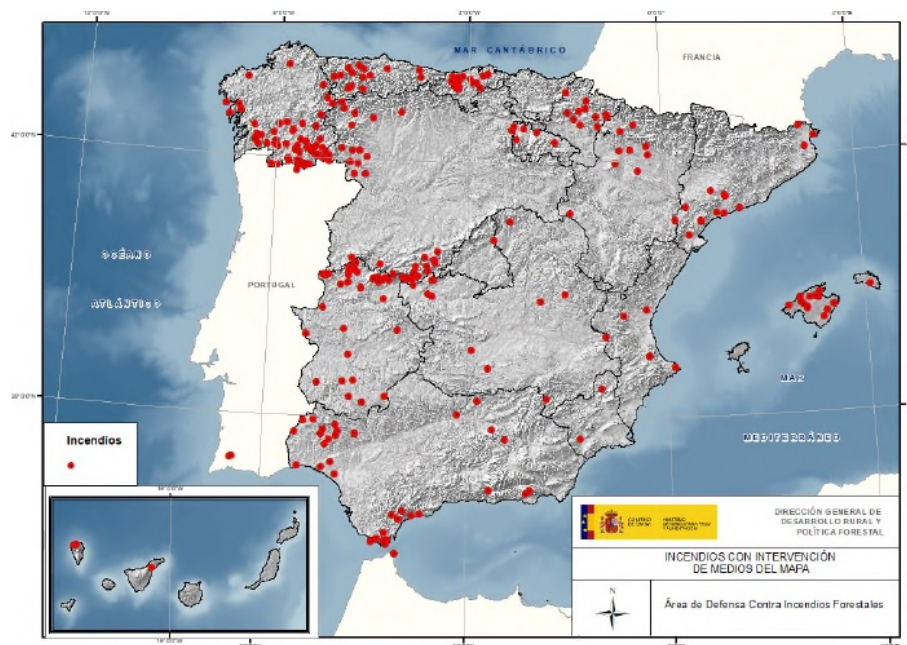


Figura 4.1: Incendios con intervención de medios en 2018 en España. Copyright 2019 por Gobierno de España. Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación [40]. Reimpreso con permiso.

Pese a que el número de incendios y conatos ha ido decreciendo en la última década, la importancia de una buena gestión de los recursos es esencial. La magnitud del problema ocasiona el gasto de millones de euros por parte de las administraciones estatales, autonómicas y locales en la prevención y contención de los incendios forestales.

Según los últimos informes del MAPA, el 44,4 % de los siniestros en 2019 se han producido en el noroeste de la península, en la zona que abarca las comunidades de Galicia, Asturias, Cantabria y País Vasco y las provincias castellanas de León y Zamora.

Además, aunque el número total de incendios al año se está reduciendo, existe una amenaza creciente, los Grandes Incendios Forestales (GIF).² En el 2018 pese a producirse tan solo 3 GIF, un 0,04 % sobre el

²Incendio en el que arden más de 500 hectáreas de superficie.

total de siniestros ocurridos, estos supusieron el 20,97 % de la superficie afectada.

Esta gran amenaza conlleva la necesidad de tomar decisiones de gran magnitud, teniendo en cuenta gran cantidad de variables que afectan a la toma de una decisión correcta.

Por ejemplo, en Galicia, una de las comunidades autónomas con más incendios de España, entre el 13 y el 15 de octubre de 2017, se registraron más de 100 incendios forestales activos de forma simultánea, con un total de 45.000 hectáreas de terreno afectado por los incendios. El despliegue de medios realizado fue de 500 soldados, 35 brigadas, 220 motobombas y 20 recursos aéreos entre otros. Este ejemplo muestra la necesidad de hacer una buena gestión de los recursos disponibles debido a que aunque limitados, pueden ser numerosos, y su uso conlleva costes y riesgos que deben ser minimizados.

El diseño de herramientas de apoyo a la gestión en logística es un campo ampliamente estudiado en investigación operativa. En la gestión de incendios forestales, destaca el estudio económico realizado por Headley [44] y Sparhawk [80] por ser precursores en este terreno. Desde un punto de vista más cercano a la investigación operativa, destaca el trabajo de Donovan y Rideout [29] por buscar una forma eficiente de gestionar los recursos disponibles en el ataque inicial a un incendio forestal. El objetivo del trabajo es conseguir la contención del incendio, minimizando el *Cost Plus Net Value Change* (C+NVC) [41], mediante la resolución de un problema de programación lineal entera mixta (MILP). El C+NVC considera los costes asociados al uso de los recursos y los costes ocasionados por las hectáreas de terreno afectadas por el incendio. Además, se menciona la importancia de considerar como costes por el efecto destructivo de los incendios, los asociados a la repoblación de los bosques, restauración de los bienes dañados...

En la literatura relativa a la gestión en el contexto de incendios forestales, se distinguen tres problemas claramente diferenciados. El primero y segundo tratan sobre la prevención y la detección, respectivamente. El tercero y último, en el que se centra la presente tesis, se refiere a la gestión de los recursos que son necesarios para la contención de un gran incendio forestal [55].

Ante este problema creciente, surge en el año 2010 en España el proyecto de investigación PROMETEO, con razón de mejorar la eficiencia en la lucha contra incendios. El proyecto liderado por Babcock España, hasta 2017 denominado Inaer, involucra tanto a entidades públicas como privadas y surge como una de las mayores apuestas en investigación aplicada en materia de lucha contra incendios. Contó con el trabajo de hasta 16 empresas y fue subvencionado en casi un 44 % por el Centro para el Desarrollo Tecnológico Industrial (CDTI) mediante el programa de financiación para estimular la cooperación público-privada en investigación industrial, Programa CENIT, que contribuye a un mejor posicionamiento tecnológico del tejido industrial español.

Como continuación del proyecto PROMETEO, surgen en los años 2013 y 2015 los proyectos LUMES y ENJAMBRE respectivamente. Ambos proyectos, promovidos por el Programa Estratégico de Consorcios de Investigación Empresarial Nacional (CIEN) y con la cofinanciación del CDTI, involucran a empresas tanto del sector público como privado. El objetivo de estos proyectos es desarrollar herramientas que faciliten y apoyen la rápida toma de decisiones seguras en la contención de incendios forestales.

Uno de los propósitos de estos tres proyectos es mejorar la gestión de recursos en la contención de incendios forestales, pudiéndose clasificar las tareas de tal propósito de la siguiente manera:

- Diseño de un algoritmo para la estimación del perímetro por unidad de tiempo en un incendio forestal. Para esta tarea se hace uso de técnicas de estimación de conjuntos, a partir de imágenes térmicas obtenidas del incendio.
- Diseño de un algoritmo para la prevención de colisiones entre recursos aéreos en un incendio forestal. El objetivo es determinar un espacio seguro para la aeronave que permita prevenir situaciones de riesgo al intersectar dicho espacio con otros objetos. Para la realización de la tarea se ha de tener en cuenta la localización espacial de los recursos aéreos y la dirección y velocidad de desplazamiento. Con esta herramienta, se pretenden evitar situaciones de riesgo por colisión con otros recursos aéreos o con obstáculos difícilmente perceptibles por la vista, tales como tendidos eléctricos.
- Diseño de un algoritmo para el cálculo de la eficiencia de las descar-

gas que realizan los recursos aéreos en la contención de incendios forestales. Para realizar la contención de un incendio forestal los recursos aéreos se abastecen de supresores o retardantes los cuales arrojan sobre los frentes del incendio. El objetivo de la tarea es estimar la eficiencia de las descargas, para posteriormente, determinar con mayor exactitud el número recursos necesarios para contener un incendio forestal.

- Diseño de un algoritmo para la gestión eficiente de recursos en la contención de un incendio forestal teniendo en cuenta la legislación vigente. El algoritmo ha de gestionar los recursos involucrados en la contención del incendio asegurando el cumplimiento de la normativa española de no negligencia de frentes (en cada frente ha de existir un número mínimo de recursos de contención) y periodos de descanso para pilotos y brigadas (establecidos en la Circular Operativa 16-B [79]).

Aunque el autor de esta tesis trabajó en los distintos objetivos de estos proyectos, en el presente trabajo se detallará el último punto mencionado, relativo a una gestión eficiente de los recursos involucrados en la contención de un incendio forestal. En las siguientes secciones se diferencian tres problemas de gestión de gran relevancia en la contención de incendios forestales: la Selección y Asignación temporal de Recursos para la Contención de un incendio forestal (SARC), la Asignación de Aeronaves a Rutas de Vuelo (AARV) y la Asignación de Aeronaves a Puntos de Repostaje (AAPR).

Selección y Asignación temporal de Recursos para la Contención de un incendio forestal (SARC)

El problema SARC está inspirado en el problema propuesto por Donovan y Rideout [29]. Donovan y Rideout proponen un modelo MILP para la planificación de un ataque inicial a un incendio forestal con el objetivo de contener el incendio minimizando el C+NVC.

La Figura 4.2 ilustra el tipo de solución que se busca resolviendo el problema de Donovan y Rideout. El modelo determina qué recursos han de ser seleccionados para trabajar en el incendio, y cuándo han de intervenir en su contención. En la figura se muestra que el incendio ha

sido detectado a las 9:00, y con los tramos representados en negro, se representa la actividad de los recursos en la contención del incendio. Además si la solución del problema es factible, se garantiza que cuando todos los recursos han abandonado el incendio es porque el incendio ha sido contenido.

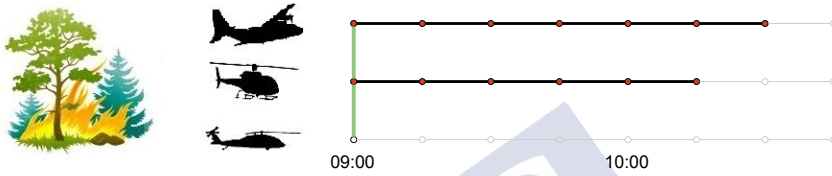


Figura 4.2: Ilustración del problema de Donovan y Rideout.

El problema SARC extiende el problema de Donovan y Rideout al considerar tres nuevos aspectos fundamentales. La primera necesidad consiste en incorporar políticas de uso de los recursos, teniendo en cuenta el tiempo máximo de trabajo diario, el tiempo máximo de vuelo sin la realización de descansos y el tiempo necesario para la consecución de un descanso. Estos requisitos surgen por la normativa vigente en España, 16-B, la cual establece jornadas de un máximo de 8 horas y 40 minutos de descanso cada 2 horas de vuelo para los recursos aéreos. La segunda, hace referencia a la necesidad de establecer un número mínimo y máximo de recursos de cada tipo. Esta restricción es necesaria para que los recursos trabajen en condiciones seguras, permitiendo establecer que ningún frente del incendio quede desatendido (empleando el número mínimo de recursos) y que, por ejemplo, el espacio aéreo del incendio no este saturado por aeronaves (número máximo de recursos aéreos). Por último, se adecuó el modelo del problema a situaciones distintas a la inicial. Se decidió extender el modelo para permitir la incorporación de estados iniciales de los recursos para poder resolver el modelo en cualquier situación. Este nuevo enfoque permite trabajar con la filosofía *rolling horizon* [75], que reacciona ante la evolución de la incertidumbre del problema, resolviendo un modelo actualizado cada vez que avanza el horizonte temporal de la optimización.

La Figura 4.3 ilustra un ejemplo de solución para el problema **SARC**. El modelo determina, a partir de la situación actual del incendio, qué recursos han de ser seleccionados para trabajar en él, y cuándo han de intervenir en su contención siguiendo las restricciones anteriormente descritas. En la figura se ilustra cómo el modelo puede ser ejecutado en un periodo distinto al inicial (9:00), y cómo han de actuar los recursos seleccionados. Además de los tramos negros y continuos, ya descritos, se da la interpretación de otros dos. Los negros discontinuos representan los periodos de vuelo para desplazarse a bases, puntos de repostaje o al incendio. Por último, los tramos azules continuos representan periodos de descanso.

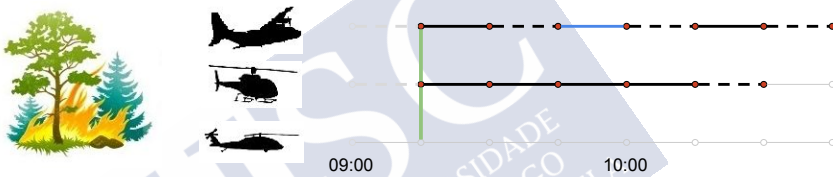


Figura 4.3: Ilustración del problema **SARC**.

Para modelar el problema es necesario tener información relativa a los recursos disponibles y la evolución del incendio en una discretización del tiempo (periodos). Respecto a la información de los recursos, es necesario disponer de los costes de uso, la capacidad de contención, el tiempo necesario para llegar al incendio desde su ubicación, e información relativa a la situación inicial del recurso (en caso de estar realizando un descanso, cuánto tiempo ha descansado; cuánto tiempo ha trabajado sin realizar un descanso; cuánto tiempo de trabajo ha realizado en la jornada; así como información para saber si se encuentra sin trabajar, trabajando en el incendio actual, o trabajando en otro incendio) y a su política de uso (descansos, tiempos máximos de trabajo sin descansos...). Además, es necesario saber el número mínimo y máximo de cada tipo de recurso. Respecto a la información de la evolución del incendio, es necesario disponer de una estimación, para cada periodo de tiempo, del incremento del perímetro del incendio y el incremento de los costes asociados a la superficie de terreno afectada por el incendio.

La definición detallada del problema **SARC** se presenta en la Sección 5.2. Para su resolución se propone un modelo MILP que describe el problema por medio de la definición de conjuntos, parámetros y variables, así como por una función objetivo y un conjunto de restricciones. Además, en el artículo se ilustra el modelo con un ejemplo inspirado en una situación real, y se realiza un estudio de simulación para analizar los resultados en términos de función objetivo y tiempos de resolución, los cuales se consideran aceptables para horizontes temporales de 5 horas, considerando periodos de 10 minutos.

Cabe destacar, que no se pudo hacer una comparativa entre las soluciones obtenidas por el modelo matemático propuesto y las decisiones tomadas en un caso real. Se solicitaron informes y datos históricos a distintas entidades, pero debido a problemas de confidencialidad, no se consiguió la información necesaria. Pese a no disponer de datos reales, para la construcción de los casos se recogió información de la prensa para establecer casos similares a los ocurridos en Galicia. Con esta información se establecieron situaciones realistas para la evolución del incendio, número de recursos que participan en la contención, características de los recursos...

En la Sección 5.3, debido a la complejidad en la resolución del problema **SARC**, se realiza un estudio para mejorar los tiempos de resolución del problema. En este documento de trabajo se presentan los resultados obtenidos al resolver el problema mediante distintas técnicas de descomposición. Las técnicas empleadas son la descomposición de Benders [14], la descomposición *branch and price* [81] y la descomposición lagrangiana [43]. Además, se describe una forma alternativa para modelar el problema basándose en la técnica de descomposición de Benders junto con el conocimiento que se tienen del problema. En el documento de trabajo se realiza un estudio de simulación para estudiar la eficiencia de los métodos propuestos en términos de optimalidad y tiempos de resolución.

En la Sección 5.5 se acompaña la definición del modelo matemático con la presentación de una interfaz gráfica diseñada mediante el paquete **shinydashboard** [21] de R. La interfaz facilita la inserción de datos en el modelo matemático, su resolución y la visualización de los resultados obtenidos para facilitar la interpretación de la solución del modelo. Además, se describe la necesidad de emplear modelos matemáticos para una

actuación eficiente en la contención de un incendio forestal relacionando los tres problemas, el problema SARC y los dos que se describen a continuación (problemas AARV y AAPR).

Asignación de Aeronaves a Rutas de Vuelo (AARV)

En la revisión realizada por Martell (2015) sobre la gestión y toma de decisiones en incendios forestales [52] se indica que,

“In the case of amphibious airtankers, the air attack officer must decide from which water body each airtanker will pick up water and when and where each airtanker will drop its load.”

El problema de decisión descrito por Martell coincide con el problema AARV y será parte de la motivación, junto con las necesidades expuestas en los proyectos de investigación mencionados anteriormente, del trabajo expuesto en la Sección 5.4.

En los incendios forestales los recursos aéreos se distribuyen en rutas de vuelo. Estas se definen como los circuitos elípticos que van desde un punto de abastecimiento de retardantes o supresores, hasta un frente del incendio, donde la carga de las aeronaves es arrojada. La distribución de los recursos aéreos en las rutas de vuelo es una tarea de gran relevancia para una contención eficiente del incendio. Esto es debido a que rutas de vuelo con gran distancia entre sus puntos de abastecimiento y descarga, ocasionará un menor número de descargas por hora de las aeronaves, empeorando por tanto el rendimiento de las mismas en las tareas de contención. Por tanto, para realizar una asignación eficiente de las aeronaves a las rutas de vuelo, se busca maximizar el rendimiento de la operación de extinción. Sin embargo, uno no se puede ceñir a seleccionar siempre las rutas de vuelo que proporcionen un mayor rendimiento. Esto es debido a que, en función del recorrido y tipología de los recursos aéreos, existe un número máximo de aeronaves por ruta. También es de gran importancia tener en cuenta el número de rutas de vuelo que comparten un mismo punto de abastecimiento; cómo se distribuye el porcentaje de retardantes o supresores en los distintos frentes del incendio (tarea

que deberá indicar el coordinador aéreo de medios aéreos en el caso de España), así como no desatender ninguno de sus frentes.

En la Figura 4.4 se ilustra el problema AARV que se desea resolver. El modelo determina, la asignación de los recursos aéreos a las rutas de vuelo que ofrece un mejor rendimiento, asegurando el cumplimiento de las restricciones previamente indicadas. Por lo tanto se asegura la operación y se ajusta la importancia de los frentes al criterio de los coordinadores.

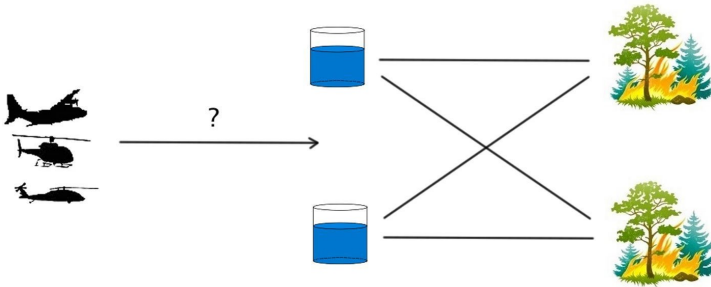


Figura 4.4: Ilustración del problema AARV.

Para modelar el problema, es necesario conocer los recursos aéreos seleccionados para la contención del incendio en un instante temporal, los puntos de abastecimiento de retardantes/supresores y los frentes del incendio que se desean atacar. Además, es necesario disponer de la capacidad de carga de los recursos aéreos, el número máximo de circuitos que pueden tener un punto de abastecimiento común, el porcentaje de retardantes/supresores que se desea en cada frente del incendio, el número máximo de recursos aéreos por ruta de vuelo y el número de descargas por hora en las rutas de vuelo.

La definición detallada del problema AARV se presenta en la Sección 5.4. Para su resolución también se propone un modelo MILP y se ilustra el modelo propuesto con un ejemplo inspirado en una situación real. Además, se realiza un estudio de simulación para analizar los tiempos de computación que se obtienen en la resolución del problema ante distinto número de recursos aéreos, puntos de abastecimiento y frentes del incendio.

Cabe señalar que las velocidades de crucero y las características to-

pográficas no se consideran explícitamente. Sin embargo, el número de descargas por hora en las rutas de vuelo refleja implícitamente estos elementos. Concretamente, el número de descargas se estima mediante una recta de regresión, teniendo en cuenta las características de los recursos aéreos y las distancias entre los puntos de agua y los frentes. Esto permite al coordinador estimar el tiempo necesario para que una aeronave recorra la ruta, lo que permite calcular, el tiempo entre dos descargas de agua consecutivas.

También es importante destacar, que aunque este problema es habitual en la contención de incendios forestales con recursos aéreos, no se encontró literatura al respecto para la realización de una comparativa con nuestro modelo.

Asignación de Aeronaves a Puntos de Repostaje (AAPR)

El combustible utilizado por los recursos aéreos es limitado, y en grandes incendios forestales, es necesario más de un punto de reabastecimiento de combustible para que las aeronaves puedan repostar. En España, tal y como se define en la Circular Operativa 16-B, el repostaje se realiza mientras los recursos aéreos realizan sus descansos en tierra. De acuerdo con estas regulaciones, las aeronaves deben tener un descanso mínimo de 40 minutos cada 2 horas de vuelo. Por lo tanto, para realizar operaciones eficientes, es importante que el repostaje no exceda el período de descanso establecido.

Con la formulación del problema, se busca gestionar la asignación de recursos aéreos a las bases de repostaje, con el objetivo de minimizar el tiempo máximo de repostaje de las aeronaves. Es importante mencionar que una vez finalizada la tarea de repostaje, los recursos aéreos volverán a su plan de trabajo previamente asignado. Por lo tanto, es fundamental considerar el tiempo necesario para volar hasta el punto de repostaje, así como el tiempo necesario para regresar al incendio forestal. Además, se debe considerar la cantidad de recursos aéreos que pueden repostar simultáneamente en una base determinada. Por ejemplo, si un punto de repostaje es un camión cisterna con una sola manguera, el suministro simultáneo de combustible a múltiples recursos aéreos se hace imposible. De este modo, un recurso puede preferir esperar mientras otro completa

el reabastecimiento de combustible en lugar de ir a una base más alejada (perdiendo así más tiempo). La cantidad de combustible en cada base y la capacidad de combustible de cada recurso aéreo también son factores relevantes. Además, una vez determinada la asignación óptima, se puede emitir un aviso con la nueva capacidad de los puntos de repostaje.

En la Figura 4.5 se ilustra el problema AAPR. El modelo determina la asignación de los recursos aéreos a las bases de repostaje, indicando cuando tienen que comenzar el repostaje para no saturar las bases.

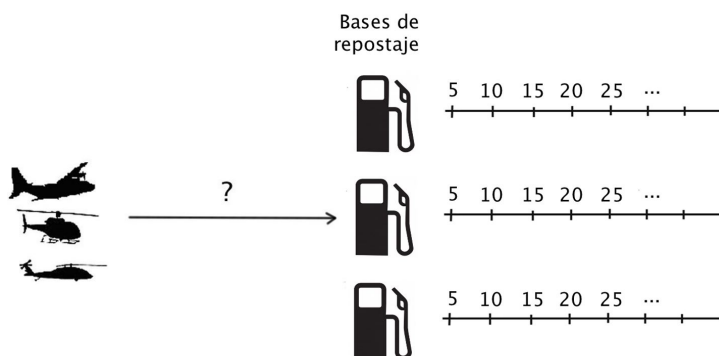


Figura 4.5: Ilustración del problema AAPR.

Los conjuntos necesarios para modelar el problema son, el conjunto de recursos aéreos, el conjunto de bases de reabastecimiento de combustible y el conjunto de períodos de tiempo. Es importante destacar que la discretización del tiempo es fundamental debido al posible solapamiento de los recursos en las bases de repostaje. En cuanto a los parámetros, se debe tener en cuenta la carga de combustible de cada recurso aéreo, así como su tiempo de repostaje requerido. Además, será necesario conocer la cantidad de combustible disponible en cada base y el número de recursos aéreos que pueden repostar simultáneamente en ellas. Por último, también se debe considerar el tiempo de vuelo de cada recurso aéreo a cada base y la compatibilidad de los recursos aéreos con las bases.

La definición detallada del problema AAPR también se presenta en

la Sección 5.4. Para su resolución, se propone un modelo MILP y se ilustra el modelo propuesto con un ejemplo inspirado en una situación real. Además, al igual que con el problema AARV, se realiza un estudio de simulación para analizar los tiempos que se obtienen en la resolución del problema ante distinto número de recursos aéreos, puntos de repostaje y periodos de tiempo.

Nuevamente, también cabe destacar que, aunque este problema es habitual en la contención de incendios forestales con recursos aéreos, no se encontró literatura al respecto.

Relación entre los problemas

Los problemas SARC, AARV y AAPR están muy relacionados entre sí. A continuación, al igual que en el capítulo que se presenta en la Sección 5.5, se explica la conexión y uso de cada uno de los modelos para facilitar la comprensión y alcance de los mismos.

Para poder realizar una buena gestión será necesario disponer de información georreferenciada de los recursos implicados en la contención del incendio forestal, frentes del incendio, puntos de abastecimiento de supresores o retardantes y bases de repostaje. Además, será necesario disponer de las características de los recursos, evolución del perímetro y área del incendio... tal y como se indicó en las definiciones anteriores de los problemas. Aspectos tan importantes como la evolución de los frentes o el rendimiento de los recursos, se apoyan principalmente en la estimación mediante históricos de datos. Estos problemas son ampliamente estudiados en la literatura, siendo los trabajos de Clarke, Brass y Riggan [22] y Finney [34] ejemplos de ello.

Con la información descrita, los coordinadores para la contención del incendio forestal, podrán emplear la herramienta diseñada para apoyar la toma de decisiones en la gestión de los recursos. En el caso de España, para entender la gestión de un incendio forestal, es necesario definir el papel de los siguientes agentes. El director de extinción, encargado de toda la operación de gestión del incendio forestal con el apoyo del resto de coordinadores. El coordinador aéreo de medios aéreos, que tiene como objetivo asegurar la seguridad de la operación y asignar a los recursos

aéreos a las rutas de vuelo. El coordinador terrestre de medios aéreos, que tiene como objetivo controlar el combustible disponible en las bases de repostaje y las horas de operación de las aeronaves. Y por último, el coordinador de los recursos terrestres, que tiene como objetivo gestionar la operación de los medios terrestres y asegurar su seguridad.

En la Figura 4.6 se esquematiza el flujo de trabajo para el uso de los modelos matemáticos. Cuando un incendio forestal es detectado, se pone en marcha el operativo de apoyo a la planificación, con la activación de una aeronave de observación a disposición del director de extinción, que permitirá realizar una buena predicción del comportamiento del fuego. A los 20 minutos el director de extinción ya dispone de un pronóstico ajustado para las próximas 4 horas y una conciencia situacional actualizada. Todo ello le servirá para la realización de la toma de decisiones tácticas. Es en este punto, cuando el director de extinción del incendio necesita determinar que subconjunto de los recursos disponibles ha de emplear para la contención del incendio forestal. Para tomar dicha decisión se podrá apoyar en el Modelo 1 (SARC). Una vez determinados los recursos y establecidos sus periodos de actuación sobre el incendio, el coordinador aéreo de recursos aéreos deberá determinar la asignación de las aeronaves a las rutas de vuelo. Para ello podrá apoyarse en la solución obtenida al resolver el Modelo 2 (AARV). Por otro lado, dado que el coordinador terrestre de recursos aéreos tiene establecidas las asignaciones horarias de las aeronaves, para cada periodo de descanso se deberá ejecutar el Modelo 3 (AAPR) para su asignación a los puntos de repostaje de combustible.

Es importante enfatizar, que con la herramienta presentada, se podrán gestionar los recursos que se deben emplear en cada momento, respetando correctamente los descansos de los mismos. Además, se podrán controlar los recursos aéreos en cada ruta de vuelo, para hacer la operación más eficiente y segura, y a qué puntos de repostaje de combustible deberán de ir las aeronaves en sus periodos de descanso, generando avisos en caso de que las bases de repostaje se estén quedando sin combustible. Por último, mencionar que las decisiones realizadas por el director de extinción en un primer momento pueden ser corregidas en función de la evolución del incendio. Es por ello que los modelos presentados permiten establecer las condiciones iniciales de los recursos para permitir el

reajuste de las soluciones obtenidas previamente a la nueva situación, siguiendo la filosofía *rolling horizon*.

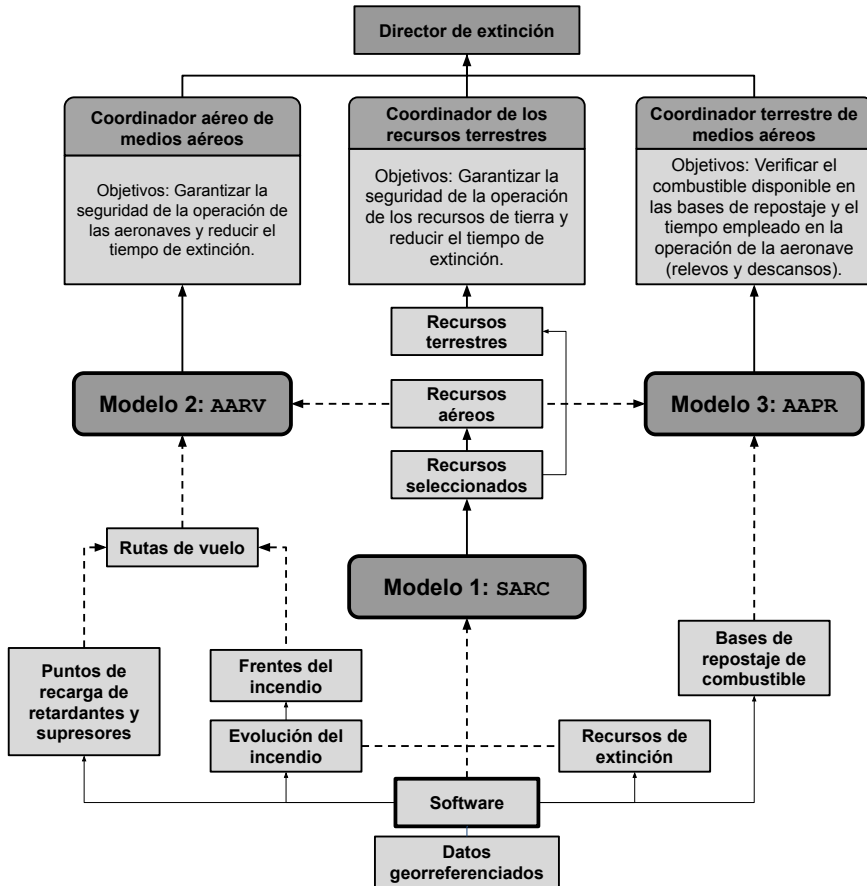


Figura 4.6: Diagrama de flujo para la contención eficiente de un incendio forestal.



Capítulo 5

Trabajos publicados y sometidos a revisión

En el presente capítulo se recogen los trabajos publicados en revistas científicas [70]-[72], un capítulo del libro [68] y el documento de trabajo [73], que está actualmente en proceso de revisión.

En cada uno de los trabajos publicados en revistas se indica la siguiente información necesaria para la publicación de la tesis por compendio de artículos:

1. Factor de impacto de la revista en la que se encuentra en el año de publicación, la posición relativa en la categoría a la que pertenece y otros índices de calidad.
2. Contribución del doctorando en caso de que haya más personas coautoras.
3. Nombre y la filiación de la autoría, los nombres y filiación de todas las personas coautoras y su orden, así como la referencia completa de la publicación o publicaciones, la editorial y el ISSN o ISBN.



5.1. *Implementing generating functions to obtain power indices with coalition configuration*

Referencia del artículo

J. Rodríguez-Veiga, G. I. Novoa-Flores y B. Casas-Méndez, «Implementing generating functions to obtain power indices with coalition configuration,» *Discrete Applied Mathematics*, vol. 214, págs. 1-15, 2016

Filiación autores: Jorge Rodríguez-Veiga¹, Guido Ignacio Novoa-Flores², Balbina Casas-Méndez³.

Contribución: Implementación de los algoritmos y revisión de la redacción del artículo.

Factor de impacto: 0.956.

Categoría: Mathematics Applied-scie.

Posición relativa: N^o 118 de un total de 255 (Q2).

Citas scopus: 4.

Citas Google: 6.

ISSN: 0166-218X.

Enlace: <https://www.sciencedirect.com>

¹Instituto Tecnológico de Matemática Industrial (ITMATI), España.

²Departamento de Estadística, Análisis Matemático y Optimización, Universidad de Santiago de Compostela, España.

³Grupo de Investigación MODESTYA, Departamento de Estadística, Análisis Matemático y Optimización, Universidad de Santiago de Compostela, España.

5.2. *An integer linear programming model to select and temporally allocate resources for fighting forest fires*

Referencia del artículo

J. Rodríguez-Veiga, M. J. Ginzo-Villamayor y B. Casas-Méndez, «An integer linear programming model to select and temporally allocate resources for fighting forest fires,» *Forests*, vol. 9, n.º 10, 583, págs. 1-18, 2018

Filiación autores: Jorge Rodríguez-Veiga¹, María José Ginzo-Villamayor², Balbina Casas-Méndez²³.

Contribución: Modelado, implementación, simulaciones y redacción del artículo.

Factor de impacto: 2.116.

Categoría: Forestry-scie.

Posición relativa: Nº 17 de un total de 67 (Q1).

Citas scopus: 4.

Citas Google: 10.

ISSN: 1999-4907.

Enlace: <https://www.mdpi.com>

¹Instituto Tecnológico de Matemática Industrial (ITMATI), España.

²Grupo de Investigación MODESTYA, Departamento de Estadística, Análisis Matemático y Optimización, Universidad de Santiago de Compostela, España.

³Facultad de Matemáticas, Universidad de Santiago de Compostela, España.

5.3. *Application of decomposition techniques in a wildfire suppression optimization model*

Información del documento de trabajo

J. Rodríguez-Veiga, D. Rodríguez-Penas, Á. M. González-Rueda y col., «Application of decomposition techniques in a wildfire suppression optimization model», inf. téc., 2021

Filiación autores: Jorge Rodríguez-Veiga¹², David R. Penas², Ángel M. González-Rueda³, María José Ginzo-Villamayor².

Contribución: Formulación e implementación de la descomposición de Benders así como de la reformulación del problema que consigue los mejores resultados. Además, diseño y ejecución de las simulaciones y redacción del artículo.

¹Instituto Tecnológico de Matemática Industrial (ITMATI), España.

²Grupo de Investigación Modestya, Departamento de Estadística, Análisis Matemático y Optimización, Universidad de Santiago de Compostela, España.

³Grupo de Investigación Modes, Departamento de Matemáticas, Universidad de A Coruña, España.

Application of decomposition techniques in a wildfire suppression optimization model

Jorge Rodríguez-Veiga^{a,c,*}, David R. Penas^c, Ángel M. González-Rueda^b,
María José Ginzo-Villamayor^c

^a*Technological Institute of Industrial Mathematics (ITMATI), Santiago de Compostela, Spain*

^b*Modes Research Group, Department of Mathematics, University of A Coruña, A Coruña, Spain*

^c*Modestya Research Group, Department of Statistics, Mathematical Analysis and Optimization, University of Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, Spain*

Abstract

Resource assignment modeling provides an automatic and fast decision support system for wildfire suppression logistics. However, this process generates challenging optimization problems in many real-world cases, and the computational time becomes a critical issue, especially in large-scale instances. Thus, to overcome that limitation, this work studies and applies a set of decomposition techniques such as augmented Lagrangian, branch and price, and Benders decompositions to a wildfire suppression model. Moreover, a reformulation strategy, inspired by Benders' decomposition, is also introduced and demonstrated. Finally, a numerical study comparing the behavior of the proposals using different problem sizes is conducted.

Keywords: Integer programming; assignment problems; wildfire management; decomposition techniques; Benders decomposition

1. Introduction

Many critical problems in disaster management and logistics can be formulated and solved using the Operations Research (OR) framework (Van Wassenhove and Pedraza Martinez, 2012; Caunhye et al., 2012). Wildfires are a type of catastrophe with a high impact on the current world, in humanitarian, economic, and above all, ecological terms (European Commission, 2019). As their frequency and magnitude are growing at an alarming rate (Dennison et al., 2014; Úbeda

*Corresponding author: jorge.rodriquez.veiga@usc.es

and Sarricolea, 2016), it is necessary to develop efficient methods to improve the prevention, detection, and planning in logistics related to wildfire suppression. Several research topics in the optimization of forest fire management have been proposed in recent years (Minas et al., 2012; Miller and Ager, 2013), resulting in new challenging problems from the OR point of view.

A strategy for managing the resources involved in a wildfire is to use a rolling horizon methodology: a resource coordinator runs a mathematical programming model multiple times, updating the input data for each run according to the evolution of the fire (Rodríguez-Veiga et al., 2018a). For that reason, solving each optimization problem for each iteration cannot be an expensive task with the execution time being a critical issue. A possible solution to obtain planning as soon as possible is to design fast heuristic methods that obtain a feasible solution without optimal guarantees. However, when the objective is to reach the global optimum or at least a close enough solution, a good alternative is to apply mathematical decomposition methods (Conejo et al., 2006).

Based on previous experience in resource management (Rodríguez-Veiga et al., 2018a,b), we applied a set of decomposition strategies to a Mixed-Integer Linear Programming (MILP) model focused on wildfire suppression. In detail, we propose some specific decomposition methods and a new model (based on an extension of one of the decompositions) to tackle this optimization problem with excellent results.

The organization of this document is as follows. Section 1.1 covers the related work while Section 1.2 presents a brief revision of the optimization model to be addressed: a logistic scheduling model for wildfire suppression. Section 2 describes different ways to apply decomposition strategies to the previous model, and Section 3 proposes a customized method based on the Benders decomposition. The performance of our proposal is evaluated using simulated data of the wildfire model and solving instances of different sizes in Section 4. Finally, Section 5 summarizes the main conclusions of our study.

1.1. Related Work

Several researchers have addressed logistic management in wildfire suppression through the OR methodology using well-known optimization models, such as vehicle routing problems (VRPs), facility location problems, or scheduling problems.

In the case of the first, routing problems can help in different ways, either minimizing the distance to reach the fire point from the deposit or building evacuation paths. An example is proposed in Yang et al. (2019), where a multiobjective VRP model optimizes both the delivered cost and the travel time.

Another issue could be to obtain the optimal location of forest fire attack facilities (operational bases where suppression resources are stored) while avoiding their overlap. These location problems are addressed in Lee (2006), where a

stochastic MILP approach proposes two different models: one model for the optimal location of these bases under uncertainty in the occurrence of fires and another model for planning the optimal deployment of firefighting.

Scheduling problems in forest fire suppression are perhaps the most frequent topic in the literature and probably the most important topic in this context. In Martell (2007), the authors apply OR methodology to help decision-making issues in forest fire prevention, detection, deployment, and initial dispatch. Another example is Zhou and Erdogan (2019), where a stochastic model to manage resource assignation and resident evacuation is presented.

As stated above, applying decomposition techniques simplifies optimization problems. In Conejo et al. (2006), several of the decomposition techniques are explained in detail, such as Benders' decomposition, Dantzig-Wolfe's decomposition, and Lagrangian decomposition. There are many examples in the literature about applying these techniques to MILP problems. We are especially interested in the problems that study logistics scheduling and contemplate recurring elements in the context of a wildfire, such as the existence of air resource management, regulations regarding the time limit for the use of resources, or the presence of temporal periods in the model.

Benders' decomposition algorithm is a popular strategy implemented with success in many works. For instance, Mercier et al. (2005) used it to combine aircraft routing and crew scheduling problems, seeking to obtain a solution where aircraft and crews are assigned to a flight. In Papadakos (2009), several airline scheduling optimization models were studied, and they were solved as an integrated model via an enhanced Benders decomposition method combined with accelerated column generation.

Moreover, Romanski and Hentenryck (2016) consider prescriptive evacuation planning for a region threatened by a natural disaster, such as a flood, forest fire, or a hurricane. They propose a Benders decomposition that generalizes the two-step approach proposed in previous work for converging evacuation plans.

Dantzig-Wolfe decomposition usually appears in the literature together with the branch and price algorithm (Barnhart et al., 1998) in the MILP context, obtaining excellent results in different case studies. Thus, works such as Martins et al. (2012) used these approaches to solve forestal harvest scheduling problems with constraints on the maximum clear-cut area. Another interesting example is Rios and Ross (2010). It applies a decomposition based on branch and price to an air-traffic scheduling problem, obtaining one flight per subproblem.

Regarding the Lagrangian decomposition method, a good example of resource allocation appears in Nishi et al. (2005). They applied a decomposition approach to a problem related to the route planning of multiple automated guided vehicles, including avoiding collisions, with the goal of minimizing the transportation costs.

As far as we know, there is no work dedicated to implementing mathematical

decomposition techniques in optimization models in the context of resource planning in wildfires. We hope to contribute to simplifying the application of these effective strategies in different forestry optimization problems.

1.2. Problem statement: a wildfire suppression model

We begin our study from a wildfire extinguishment model, described in Rodríguez-Veiga et al. (2018a), where an MILP model is presented to find an optimal resource assignation to extinguish a wildfire. The resources are allocated in different periods to contain a wildfire, according to Spanish regulations for the nonnegligence of the fronts and rest periods for pilots and brigades.

A short description of this model is shown in the following paragraphs. Table 1 shows a definition of the different sets and parameters used in the model, and Table 2 describes the decision and auxiliary variables. The objective function and the constraints of the model are formulated as follows:

$$\text{minimize} \quad \sum_{i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}} C_i \cdot \mathbf{u}_{it} + \sum_{i \in \mathcal{I}} P_i \cdot \mathbf{z}_i + \sum_{t \in \mathcal{T}} NV C_t \cdot \mathbf{y}_{t-1} + \sum_{g \in \mathcal{G}, t \in \mathcal{T}} M' \cdot \boldsymbol{\mu}_{gt} \quad (1)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{t \in \mathcal{T}} PER_t \cdot \mathbf{y}_{t-1} \leq \sum_{i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}} PR_{it} \cdot \mathbf{w}_{it} \quad (2)$$

$$\forall t \in \mathcal{T}, \quad M \cdot \mathbf{y}_t \geq \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} PER_{t'} \cdot \mathbf{y}_{t-1} - \sum_{i \in \mathcal{I}, t' \in \mathcal{T}^t} PR_{it'} \cdot \mathbf{w}_{it'} \quad (3)$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad A_i \cdot \mathbf{w}_{it} \leq \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} \mathbf{tr}_{it'} \quad (4)$$

$$\forall i \in \mathcal{I} : ITW_i = 1, \quad \mathbf{s}_{i1} + \sum_{t \in \mathcal{T}_2} (m+1) \cdot \mathbf{s}_{it} \leq m \cdot \mathbf{z}_i \quad (5)$$

$$\forall i \in \mathcal{I} : ITW_i = 0, \quad \sum_{t \in \mathcal{T}} \mathbf{s}_{it} \leq \mathbf{z}_i \quad (6)$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad \sum_{t' \in \mathcal{T}_{t-TRP_i+1}^t} \mathbf{tr}_{it'} \geq TRP_i \cdot \mathbf{e}_{it} \quad (7)$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad 0 \leq \mathbf{cr}_{it} \leq WP_i \quad (8)$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad \mathbf{r}_{it} \leq \sum_{t' \in \mathcal{T}_{t+RP_i-1}^t} \mathbf{er}_{it'} \quad (9)$$

Table 1: Sets and parameters of the problem.

| Sets | Definition |
|------------------------------|--|
| i, I | Index and set of resources. |
| g, \mathcal{G} | Index and set of different resources groups. |
| t, \mathcal{T} | Index and set of time periods with wildfire behaviour information $\{1, \dots, m\}$. |
| i, \mathcal{I}_g | Index and set of resources associated with group g . |
| $t, \mathcal{T}_{t_1}^{t_2}$ | Index and set of time periods between the natural numbers t_1 and t_2 , $\{\max\{1, t_1\}, \dots, \min\{m, t_2\}\}$. If the sub-index or super-index is omitted, it means that $t_1 = 1$ and $t_2 = m$, respectively. When t_1 is greater than t_2 , we will consider it an empty set. |
| Parameters | Definition |
| C_i | Cost per usage period of resource $i \in \mathcal{I}$. |
| P_i | Fixed cost for resource $i \in \mathcal{I}$ selection. |
| NVC_t | Increase in the costs of the wildfire in period $t \in \mathcal{T}$. |
| PER_t | Increment of the wildfire perimeter in period $t \in \mathcal{T}$. |
| PR_{it} | Performance of resource $i \in \mathcal{I}$ in period $t \in \mathcal{T}$. |
| ITW_i | Value 1 indicates resource $i \in \mathcal{I}$ is currently working in this wildfire (0 otherwise). |
| IOW_i | Value 1 indicates resource $i \in \mathcal{I}$ is currently working in other wildfire (0 otherwise). |
| CWP_i | Number of periods used since the last final rest of $i \in \mathcal{I}$. |
| CRP_i | Number of rest periods used by resource $i \in \mathcal{I}$. |
| CUP_i | Number of usage periods in the day of resource $i \in \mathcal{I}$. |
| A_i | Number of periods needed by $i \in \mathcal{I}$ to arrive to the wildfire. |
| WP_i | Maximum allowed number of periods without breaks for $i \in \mathcal{I}$. |
| TRP_i | Number of periods needed by resource $i \in \mathcal{I}$ to go from the resting point to the fire. |
| RP_i | Number of rest periods that resource $i \in \mathcal{I}$ must do on a break before starting to work again. |
| UP_i | Maximum number of allowed usage periods in a day for $i \in \mathcal{I}$. |
| $nMin_{gt}$ | Minimum number of resources of group $g \in \mathcal{G}$ working on the wildfire in the same period $t \in \mathcal{T}$. |
| $nMax_{gt}$ | Maximum number of resources of group $g \in \mathcal{G}$ working on the wildfire in the same period $t \in \mathcal{T}$. |
| M' | Positive constant that penalizes the breach of the minimum number of resources in each period. |
| M | Positive sufficiently large constant to establish wildfire containment. A suitable value is $M := \sum_{t \in \mathcal{T}} PER_t$. |

Table 2: **Variables of the problem.**

| Variables | Definition |
|---------------------------|---|
| $s_{it} \in \{0, 1\}$ | It takes the value 1 if resource $i \in \mathcal{I}$ is starting to be used in period $t \in \mathcal{T}$. |
| $tr_{it} \in \{0, 1\}$ | It takes the value 1 if resource $i \in \mathcal{I}$ is travelling in period $t \in \mathcal{T}$. |
| $r_{it} \in \{0, 1\}$ | It takes the value 1 if resource $i \in \mathcal{I}$ is resting in period $t \in \mathcal{T}$. |
| $er_{it} \in \{0, 1\}$ | It takes the value 1 if resource $i \in \mathcal{I}$ is ending a break in period $t \in \mathcal{T}$. |
| $e_{it} \in \{0, 1\}$ | It takes the value 1 if resource $i \in \mathcal{I}$ is ending its work in period $t \in \mathcal{T}$. |
| $y_t \in \{0, 1\}$ | It takes the value 1 if the fire is not contained in period $t \in \{0\} \cup \mathcal{T}$. |
| $\mu_{gt} \in \mathbb{N}$ | It indicates the number of missing resources of group $g \in \mathcal{G}$ to reach the corresponding minimum in period $t \in \mathcal{T}$. |
| Aux Vars | Definition |
| u_{it} | Resource $i \in \mathcal{I}$ has a task assigned in period $t \in \mathcal{T}$. $u_{it} := \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} s_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^{t-1}} e_{it'}.$ |
| w_{it} | Resource $i \in \mathcal{I}$ works fighting the wildfire in period $t \in \mathcal{T}$. $w_{it} := u_{it} - r_{it} - tr_{it}.$ |
| z_i | Resource $i \in \mathcal{I}$ is selected to fight the wildfire. $z_i := \sum_{t \in \mathcal{T}} e_{it}.$ |
| cr_i | Number of periods since the last ending break period of resource $i \in \mathcal{I}$ in period $t \in \mathcal{T}$. $cr_{it} := \begin{cases} \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} (t+1-t') \cdot s_{it'} \\ - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} (t-t') \cdot e_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} r_{it'} \\ - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} WP_i \cdot er_{it'} & \text{if } ITW_i = 0 \\ & \text{and } IOW_i = 0 \\ (t + CWP_i - CRP_i) \cdot s_{i1} \\ + \sum_{t' \in \mathcal{T}_2^t} (t+1-t' + WP_i) \cdot s_{it'} \\ - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} (t-t') \cdot e_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} r_{it'} \\ - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} WP_i \cdot er_{it'} & \text{in the other case} \end{cases}$ |

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T} : t \geq RP_i, \sum_{t' \in \mathcal{T}_{t-RP_i+1}^t} r_{it'} \geq RP_i \cdot \mathbf{er}_{it} \quad (10)$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T} : t < RP_i, CRP_i \cdot \mathbf{s}_{i1} + \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} r_{it'} \geq RP_i \cdot \mathbf{er}_{it} \quad (11)$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \sum_{t' \in \mathcal{T}_{t-TRP_i}^{t+TRP_i}} (r_{it'} + \mathbf{tr}_{it'}) \geq \sum_{t' \in \mathcal{T}_{t-TRP_i}^{t+TRP_i}} r_{it'} \quad (12)$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, \sum_{t \in \mathcal{T}} \mathbf{u}_{it} \leq UP_i - CUP_i \quad (13)$$

$$\forall g \in \mathcal{G}, t \in \mathcal{T}, \sum_{i \in \mathcal{I}_g} \mathbf{w}_{it} \geq nMin_{gt} \cdot \mathbf{y}_{t-1} - \mu_{gt} \quad (14)$$

$$\forall g \in \mathcal{G}, t \in \mathcal{T}, \sum_{i \in \mathcal{I}_g} \mathbf{w}_{it} \leq nMax_{gt} \cdot \mathbf{y}_{t-1} \quad (15)$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, \sum_{t \in \mathcal{T}} t \cdot \mathbf{e}_{it} \geq \sum_{t \in \mathcal{T}} t \cdot \mathbf{s}_{it} \quad (16)$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, \sum_{t \in \mathcal{T}} \mathbf{e}_{it} \leq 1 \quad (17)$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \mathbf{r}_{it} + \mathbf{tr}_{it} \leq \mathbf{u}_{it} \quad (18)$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, \sum_{t \in \mathcal{T}} \mathbf{w}_{it} \geq \mathbf{z}_i \quad (19)$$

The objective function (1) minimizes the sum of the costs involved in the wildfire contention: the first term represents the variable costs for the use of the selected resources, the second term represents their selection costs, the third term represents the costs associated with the hectares of affected land, and the last term is included to penalize the breach of the minimum number of group resources in each period.

Regarding the constraints, (2) imposes that the total perimeter covered by the resources must be greater than the wildfire perimeter in the contained period, (3) establishes the conditions under which the wildfire can be contained or not in each period, (4)-(6) are related to the coherent beginning of resource activities, and (7) indicates when a resource ends its job with enough time to return to its operational base. Moreover, (8)-(13) correspond to making task

assignment feasible according to legal regulations, and (14)-(15) determine the minimum and the maximum number of resources in the wildfire while the fire is not contained, respectively. Finally, (16)-(19) determine logical conditions that the variables must satisfy.

2. Applying decomposition methods to the problem

Obtaining a global solution with a threshold time can be difficult in large-scale instances in the model explained above.

In the real world, the optimization process associated with wildfire suppression is managed by a resource coordinator who oversees the schedules of all logistic operations. Mathematical models, as stated before, help to conduct these tasks. They provide high-quality solutions to minimize the impacts caused by a wildfire. It implies that time is a critical issue. Conducting optimization that takes hours to reach optimality does not make sense when a wildfire is occurring. The resource coordinator must react quickly and cannot afford to wait a long time.

Decomposition strategies (Conejo et al., 2006) offer a good alternative to simplify the models and reduce the computational time. They split the problem into more manageable subproblems based on their complicating variables or constraints (nondecomposable elements). However, solving these subproblems is not an easy task, and it is necessary to adapt algorithms to the specific model. Therefore, the following subsections offer a detailed explanation of how to apply techniques such as augmented Lagrangian decomposition, branch and price decomposition, or Benders decomposition, to the wildfire suppression model, hereinafter called the **original problem**.

2.1. Augmented Lagrangian decomposition

The Augmented Lagrangian (AL) is a framework of penalty methods extensively studied in recent decades (Hamdi and Mishra, 2011). It consists of seeking to simplify the original problem, moving the complicating constraints to the objective function, and multiplying them by Lagrange multipliers and penalty constants. Furthermore, the iterative calibration of these penalties allows good-quality feasible solutions to be reached.

An AL problem can be decomposed for given values of these Lagrange multipliers, and this procedure is known as Augmented Lagrangian decomposition (ALD). We adjusted this procedure, creating a set of different subproblems. In this way, each subproblem maps a particular resource (aircraft, brigade, or machine) and considers the other resources' values as constants. Consequently, there is the same number of subproblems as different resources in the model, resulting in the following formulation:

Augmented Lagrangian Subproblem i

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{t \in \mathcal{T}} C_i \cdot \mathbf{u}_{it} + P_i \cdot \mathbf{z}_i + \sum_{t \in \mathcal{T}} NVC_t \cdot \bar{y}_{t-1} + \sum_{g \in \mathcal{G}, t \in \mathcal{T}} M' \cdot \boldsymbol{\mu}_{gt} \\
& + (\bar{\lambda}_1 \cdot (\text{penSet}_1 + v_1) + \frac{1}{2} \cdot \bar{\beta}_1 \cdot (\text{penSet}_1 + v_1)^2) \\
& + \sum_{t \in \mathcal{T}} (\bar{\lambda}_{t+1} \cdot (\text{penSet}_2(t) + v_{t+1}) + \frac{1}{2} \cdot \bar{\beta}_{t+1} \cdot (\text{penSet}_2(t) + v_{t+1})^2)
\end{aligned}$$

subject to

$$(4) - (19)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, t+1\}, \quad v_j \geq 0$$

being

$$\begin{aligned}
\text{penSet}_1 &= \sum_{t \in \mathcal{T}} PER_t \cdot \bar{y}_{t-1} - \sum_{t \in \mathcal{T}} (PR_{it} \cdot \mathbf{w}_{it} + \sum_{i' \in \mathcal{I}, i' \neq i} PR_{i't} \cdot \bar{w}_{i't}), \\
\text{penSet}_2(t) &= -M \cdot \bar{y}_t + \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} (PER_{t'} \cdot \bar{y}_{t-1}) \\
&\quad - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} (PR_{it'} \cdot \mathbf{w}_{it'} + \sum_{i' \in \mathcal{I}, i' \neq i} PR_{i't'} \cdot \bar{w}_{i't'}),
\end{aligned}$$

where $\bar{\lambda}$ corresponds to fixed Lagrange multipliers, $\bar{\beta}$ is the fixed penalty parameters large enough to ensure local convexity, and \bar{y} is the contained period of the wildfire. Since each subproblem needs to have coherence in variable y to guarantee the separability, we have decided to fix the variable as a constant, and explore all the possibilities of y for each iteration of the ALD method. Moreover, expressions penSet_1 and penSet_2 represent inequality constraints (2) and (3), respectively, which are modified to appear penalized in the objective function. v is a set of auxiliary variables to transform inequalities penSet_1 and penSet_2 into equality constraints. As can be observed, the ALD method adds quadratic terms to penalties to confer good convexity properties.

Regarding the formulation of penSet_1 and penSet_2 , we highlight that w_{it} are primary variables of subproblem i that represent the working time of resource i , and $\bar{w}_{i't}$ are constant values that correspond to the values of w in other resources. Thus, the value of each resource i' will be addressed in its respective subproblem, consequently facilitating the decomposition of the original problem.

Theoretically, although constraints (14) and (15) could also be penalized in the objective function, we have empirically observed that it causes the convergence to worsen, making it more complex to coordinate their penalties in the resulting subproblems.

As stated above, the ALD method is an iterative algorithm, that seeks to calibrate their penalties to obtain reasonable feasible solutions. It requires an initial solution that can be obtained, for example, using a constructive heuristic. Then, the algorithm repeats the following steps until a stopping criterion is fulfilled. The algorithm decomposes the original problem, iterates over each period $t \in \mathcal{T}$, fixe $y_t = 0$ to consider it as the possible contained period, and solve the corresponding subproblem with a specific λ and β . These parameters are updated with the results provided by the subproblem in each iteration. This calibration process is conducted using a subgradient method, which is a strategy widely used in the AL literature. Although using the subgradient method causes the loss of the global optimality guarantee in MILP problems (Fisher, 2004), the algorithm exhibited good performance in our experiments. The following expressions represent an example of how to update these multipliers and constants in the iteration k and for penalty $PenSet_1$:

$$\begin{aligned}\lambda_1^{(k+1)} &= \lambda_1^{(k)} + \beta_1^{(k)} \cdot PenSet_1^{(k)} \\ \beta_1^{(k+1)} &= 1.2 \cdot \beta_1^{(k)}\end{aligned}$$

$PenSet_2$ also has an analogous procedure. Moreover, the method updates the fixed resources' value in the subproblems at the end of each iteration, but only when a new feasible solution is reached. Finally, ALD will stop when it has converged or has obtained an infeasible problem for each possible y .

2.2. Branch and price decomposition

Branch and Price Decomposition (BPD) (Barnhart et al., 1998; Vanderbeck and Wolsey, 1996; Vanderbeck and Savelsbergh, 2006) can be a good alternative to decrease the complexity of large-scale MILP problems. The method is a hybrid of branch and bound and Dantzig–Wolfe Decomposition (DWD).

The BPD is suitable when the problem presents some complicating constraints that prevent a distributed solution into several subproblems defining more tractable combinatorial structures.

The BPD algorithm applies the DWD procedure in each node of the branch and bound method. The DWD is a column generation procedure for continuous problems that instead of considering all the variables of the problem at once, in each step, it solves a master problem containing only some active columns. Furthermore, some subproblems are solved iteratively in order to determine the columns that must be added in the master problem to improve the objective function.

In our case, we want to decompose the original problem into several subproblems depending only on resource $i \in \mathcal{I}$, so the resulting subproblems will be more tractable. It is easy to identify that the complicating constraints avoiding this decomposable structure are the following: (2), (3), (14) and (15). Therefore,

these constraints must be relaxed and appear penalized in the objective function of the subproblems.

BPD Master Problem

Suppose that we know p solutions of the problem that we denote as SOL_k , for all $k = 1, \dots, p$. Then,

$$SOL_s = (s_{11}^k, \dots, s_{nm}^k, tr_{11}^k, \dots, tr_{nm}^k, r_{11}^k, \dots, r_{nm}^k, er_{11}^k, \dots, er_{nm}^k, e_{11}^k, \dots, e_{nm}^k, y_1^k, \dots, y_m^k, \mu_{11}^k, \dots, \mu_{gm}^k).$$

The BPD master problem can be formulated as follows:

$$\text{minimize} \quad \sum_{k=1}^p f^{(k)} \cdot \alpha_k$$

subject to

$$\sum_{k=1}^p h^{(k)(2)} \cdot \alpha_k \leq 0 \quad (20)$$

$$\forall t \in \mathcal{T}, \sum_{k=1}^p h_t^{(k)(3)} \cdot \alpha_k \leq 0 \quad (21)$$

$$\forall t \in \mathcal{T}, \forall g \in \mathcal{G}, \sum_{k=1}^p h_{gt}^{(k)(14)} \cdot \alpha_k \leq 0 \quad (22)$$

$$\forall t \in \mathcal{T}, \forall g \in \mathcal{G}, \sum_{k=1}^p h_{gt}^{(k)(15)} \cdot \alpha_k \leq 0 \quad (23)$$

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k = 1 \quad (24)$$

$$\forall k \in \{1, \dots, p\}, \alpha_k \in \{0, 1\} \quad (25)$$

where $f^{(k)}$ is the value of the objective function (1) associated with SOL_k ,

$$\sum_{i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}} C_i \cdot u_{it}^k + \sum_{i \in \mathcal{I}} P_i \cdot z_i^k + \sum_{t \in \mathcal{T}} NVC_t \cdot y_{t-1}^k + \sum_{g \in \mathcal{G}, t \in \mathcal{T}} M' \cdot \mu_{gt}^k$$

and $h^{(k)(2)}$, $h_t^{(k)(3)}$, $h_{gt}^{(k)(14)}$ and $h_{gt}^{(k)(15)}$ are the values of the complicating constraints (2), (3), (14) and (15), associated with solution SOL_s , respectively,

$$\begin{aligned}
h^{(k)(2)} &= \sum_{t \in \mathcal{T}} PER_t \cdot \mathbf{y}_{t-1}^k - \sum_{i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}} PR_{it} \cdot \mathbf{w}_{it}^k \\
h_t^{(k)(3)} &= \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} PER_{t'} \cdot \mathbf{y}_{t-1}^k - \sum_{i \in \mathcal{I}, t' \in \mathcal{T}^t} PR_{it'} \cdot \mathbf{w}_{it'}^k - M \cdot \mathbf{y}_t^k \\
h_{gt}^{(k)(14)} &= nMin_{gt} \cdot \mathbf{y}_{t-1}^k - \boldsymbol{\mu}_{gt}^k - \sum_{i \in \mathcal{I}_g} \mathbf{w}_{it}^k \\
h_{gt}^{(k)(15)} &= \sum_{i \in \mathcal{I}_g} \mathbf{w}_{it}^k - nMax_{gt} \cdot \mathbf{y}_{t-1}^k
\end{aligned}$$

BPD Subproblem

Suppose that we solve the LP relaxation of the BPD master problem,¹ and let us denote $\lambda^{(2)}$, $\lambda_t^{(3)}$, $\lambda_{gt}^{(14)}$, $\lambda_{gt}^{(15)}$ and σ as the dual solution values associated with constraints (20), (21), (22), (23) and (24), respectively.

Then, the formulation of the (aggregated) BPD subproblem can be expressed as:

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}} C_i \cdot \mathbf{u}_{it} + \sum_{i \in \mathcal{I}} P_i \cdot \mathbf{z}_i + \sum_{t \in \mathcal{T}} NVC_t \cdot \mathbf{y}_{t-1} + \sum_{g \in \mathcal{G}, t \in \mathcal{T}} M' \cdot \boldsymbol{\mu}_{gt} \\
& - \lambda^{(2)} \left(\sum_{t \in \mathcal{T}} PER_t \cdot \mathbf{y}_{t-1} - \sum_{i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}} PR_{it} \cdot \mathbf{w}_{it} \right) - \sum_{t \in \mathcal{T}} \\
& - \lambda_t^{(3)} \left(\sum_{t' \in \mathcal{T}^t} PER_{t'} \cdot \mathbf{y}_{t-1} - \sum_{i \in \mathcal{I}, t' \in \mathcal{T}^t} PR_{it'} \cdot \mathbf{w}_{it'} - M \cdot \mathbf{y}_t \right) \\
& - \sum_{g \in \mathcal{G}} \sum_{t \in \mathcal{T}} \lambda_{gt}^{(14)} (nMin_{gt} \cdot \mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{gt} - \sum_{i \in \mathcal{I}_g} \mathbf{w}_{it}) \\
& - \sum_{g \in \mathcal{G}} \sum_{t \in \mathcal{T}} \lambda_{gt}^{(15)} \left(\sum_{i \in \mathcal{I}_g} \mathbf{w}_{it} - nMax_{gt} \cdot \mathbf{y}_{t-1} \right) - \sigma
\end{aligned}$$

subject to

$$(4) - (13), (16) - (19)$$

First, it is important to note that this BPD subproblem is decomposable by resource $i \in \mathcal{I}$, obtaining $|\mathcal{I}|$ subproblems that can be solved independently. Once the subproblem is solved, depending on the value of the objective function associated with this new solution, one can determine whether to include this tentative basic new solution (associated with the variable $\boldsymbol{\alpha}$ that represents the

¹It corresponds to relaxing the integrality conditions over the α_k variables.

weight given to each solution added to the master problem) to the BPD master problem. If the solution improves the objective function, then this new solution is added to the BPD master problem and solved again, giving new dual value solutions to update the BPD subproblem. Thus, this procedure is repeated until no more columns can be added. Note that the scheme we have just described must be applied at every node of a branch and bound procedure.

2.3. Benders decomposition

Benders decomposition (BD) is a popular technique to decompose optimization problems (Benders, 1962; Rahmaniani et al., 2017). Contrary to the previous methods, it aims to split an optimization model into two different subsets based on their complicating variables. When the values of those complicating variables are fixed, the resultant problem is less complicated to solve. Thus, by applying BD to our wildfire suppression model, the following is obtained: a master problem, which manages to select what resources can contain the wildfire (complicating variables); and a subproblem, whose goal is to search for feasible solutions according to rest policy while knowing the state of resources in every moment.

We have adapted the BD method by adding a set of transformations to the original problem based on the next premise: if it is known when a resource starts to work in the wildfire, we can determine the rest, flight, and work periods. Consequently, to take advantage of this idea, it is necessary to modify the original problem to facilitate separability. This new reformulation will consider how resources must perform rest and travel periods from the start period until the last period (period m). Furthermore, this information is kept in mind to establish when resources must rest, travel, and work while they are in use, that is, until variable e_{it} takes the value 1.

Reformulated Problem

Transformations can be classified into two groups. First, variables associated with travel times have been divided into three new variables to define traveling periods at the start, rest and end of work (see Table 3).

Table 3: Definition of travel variables.

| Variables | Definition |
|--------------------------|---|
| $tr_{it}^s \in \{0, 1\}$ | It takes the value 1 if resource $i \in \mathcal{I}$ is travelling to go to the wildfire in period $t \in \mathcal{T}$ (travelling associated with start period). |
| $tr_{it}^r \in \{0, 1\}$ | It takes the value 1 if resource $i \in \mathcal{I}$ is travelling to perform a rest period or to return to the wildfire in period $t \in \mathcal{T}$ (travelling associated with breaks). |
| $tr_{it}^e \in \{0, 1\}$ | It takes the value 1 if resource $i \in \mathcal{I}$ is travelling to leave the wildfire in period $t \in \mathcal{T}$ (travelling associated with end period). |

Therefore, we know when a resource starts to work in the wildfire and are able to determine the rest, flight, and work periods during all periods.

The second transformations are because knowing the start period of a resource can allow one to establish how the resource should act in each period (work, travel, or rest). To accomplish this aim, a new group of variables has been introduced in the model to indicate how a resource must act from its start period until the last one (period). These variables are denoted by a hat over them: traveling associated with rest periods ($\hat{\mathbf{tr}}_{it}^r$), resting ($\hat{\mathbf{r}}_{it}$), ending break ($\hat{\mathbf{er}}_{it}$) and ending ($\hat{\mathbf{e}}_{it}$). Auxiliary variables $\hat{\mathbf{u}}_{it}$, $\hat{\mathbf{w}}_{it}$ and $\hat{\mathbf{cr}}_{it}$ are also defined using the expression of the original model but replacing \mathbf{tr}_{it} , \mathbf{r}_{it} , \mathbf{er}_{it} and \mathbf{e}_{it} with $\hat{\mathbf{tr}}_{it}^r$, $\hat{\mathbf{r}}_{it}$, $\hat{\mathbf{er}}_{it}$ and $\hat{\mathbf{e}}_{it}$, respectively.

As a result of applying these transformations, the reformulated problem can be expressed as:

minimize (1)

subject to

(2), (3), (5), (6), (13), (14), (15), (16), (17), (18), (19),

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad A_i \cdot \mathbf{w}_{it} \leq \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} \mathbf{tr}_{it'}^s \quad (\text{r4})$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad \sum_{t' \in \mathcal{T}_{t-TRP_i+1}^t} \mathbf{tr}_{it'}^e \geq TRP_i \cdot \mathbf{e}_{it} \quad (\text{r7})$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad 0 \leq \hat{\mathbf{cr}}_{it} \leq WP_i \quad (\text{r8})$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad \hat{\mathbf{r}}_{it} \leq \sum_{t' \in \mathcal{T}_{t+RP_i-1}^t} \hat{\mathbf{er}}_{it'} \quad (\text{r9})$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T} : t \geq RP_i, \quad \sum_{t' \in \mathcal{T}_{t-RP_i+1}^t} \hat{\mathbf{r}}_{it'} \geq RP_i \cdot \hat{\mathbf{er}}_{it} \quad (\text{r10})$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T} : t < RP_i, \quad CRP_i \cdot \mathbf{s}_{i1} + \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} \hat{\mathbf{r}}_{it'} \geq RP_i \cdot \hat{\mathbf{er}}_{it} \quad (\text{r11})$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad \sum_{t' \in \mathcal{T}_{t-TRP_i}^{t+TRP_i}} (\hat{\mathbf{r}}_{it'} + \hat{\mathbf{tr}}_{it'}^r) \geq \sum_{t' \in \mathcal{T}_{t-TRP_i}^{t+TRP_i}} \hat{\mathbf{r}}_{it} \quad (\text{r12})$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad \hat{\mathbf{r}}_{it} + \hat{\mathbf{tr}}_{it}^r \leq \hat{\mathbf{u}}_{it} \quad (\text{r18})$$

Moreover, the following constraints are introduced to establish a relation between the original variables and the new variables:

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad \mathbf{u}_{it} \leq \hat{\mathbf{u}}_{it} \quad (\text{26})$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad r_{it} = \mathbf{u}_{it} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{it} \quad (27)$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad er_{it} = \mathbf{u}_{it} \cdot \hat{\mathbf{e}}\mathbf{r}_{it} \quad (28)$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad w_{it} = \mathbf{u}_{it} \cdot \hat{\mathbf{w}}_{it} \cdot (1 - \max\{\mathbf{tr}_{it}^s, \mathbf{tr}_{it}^e\}) \quad (29)$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad \mathbf{tr}_{it}^r = \mathbf{u}_{it} \cdot \hat{\mathbf{tr}}_{it}^r \quad (30)$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad \mathbf{tr}_{it} = \max\{\mathbf{tr}_{it}^s, \mathbf{tr}_{it}^e, \mathbf{tr}_{it}^r\} \quad (31)$$

In order to explain the reformulated problem, we illustrate the performed transformations with an example.

Example 1. Let us consider a problem instance with a single resource ($\mathcal{I} = \{1\}$) and 9 periods ($\mathcal{T} = \{1, \dots, 9\}$). Suppose that the resource starts without initial conditions ($CWP_1 = CRP_1 = CUP_1 = ITW_1 = IOW_1 = 0$) and it must travel 1 period from its origin to the wildfire ($A_1 = 1$). The resource performance is 1 for all periods ($PR_{1t} = 1$ for all $t \in \mathcal{T}$), and the maximum number of allowed periods without breaks is 4 ($WP_1 = 4$). Furthermore, it must perform 1 travel period between rests ($TRP_1 = 1$), and 1 rest period ($RP_1 = 1$).

In this context, suppose that the wildfire has an initial perimeter of 2 km and it grows 0.1 km per period ($PER_1 = 2$ and $PER_t = 0.1$ for all $t \in \{2, \dots, 9\}$).

Figure 1 shows the solution (active variables for each period) of the given instance to represent the main idea of the reformulated problem. The figure illustrates how the new variables split the model into two parts to satisfy the rest policy.

- The new variables (those over the edges) denoted with the hat represent how the resource must perform the rest periods. Furthermore, it also considers travel due to rest periods.
- The original variables (those below the edges) represent how the resource works in the wildfire to contain it, ensuring that the travel and rest periods established by the new variables must be performed.

Figure 1 shows that in the first period, the resource starts to be used in the wildfire. At this moment, although variable $\hat{\mathbf{w}}$ indicates that the resource could work, it does not do so because constraints (r4) and (29) force the resource to perform a starting flight before beginning to work. In periods 2, 3, and 7, the

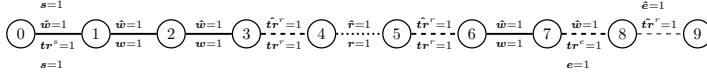


Figure 1: Illustration of the relation between original variables and the new ones.

resource works because of $\hat{w} = 1$, and it does not have to perform starting or ending flights (constraint (29)). In periods 4 and 6, the resource is forced to fly to take a break due to constraint (30). Something similar happens in period 5 with constraints (27) and (28). Finally, the resource contains the wildfire in period 7 with the ending flight occurring in the next period (allowed by the same reasons as the starting flight).

It is important to note that the starting period is the same for both cases since the definitions of the auxiliary variables $\hat{\mathbf{u}}$ are defined using \mathbf{s} .

Table 4 represents the evolution of the wildfire and the performance of the resource over the periods. Note that the resource contains the wildfire in period 7, so from this period, the wildfire perimeter will be 0. In period 8, the resource could keep working since it would satisfy the rest policy ($\hat{w} = 1$), but the wildfire is contained, so the resource must leave it ($tr^e = 1$). To simplify the notation, in Table 4, we denote $FirePer_t$ as the perimeter of the wildfire and $ResoPer_t$ as the perimeter performed by the resources in each period, i.e., for all $t \in \mathcal{T}$.

$$FirePer_t := \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} PER_{t'} \cdot \mathbf{y}_{t-1}$$

$$ResoPer_t := \sum_{i \in \mathcal{I}, t' \in \mathcal{T}^t} PR_{it'} \cdot \mathbf{w}_{it'}$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------------|-----|-----|
| $FirePer_t$ | 2.0 | 2.1 | 2.2 | 2.3 | 2.4 | 2.5 | 2.6 | 0.0 | 0.0 |
| $ResoPer_t$ | 0.0 | 1.0 | 2.0 | 2.0 | 2.0 | 2.0 | 3.0 | 3.0 | 3.0 |

Table 4: Evolution of the wildfire perimeter and the contention of the resources.

□

As shown, the reformulated problem is more complicated to solve than the original problem since it combines integer variables and nonlinear constraints. However, the purpose is not to solve this problem but to improve its decomposition. The reformulated problem is transformed so that when Benders decomposition is applied, the nonlinear constraints (27)-(30) are linearized by fixing the variables of the original problem.

Similar to the notation of a solution in Section 2.2, we define a solution for the original problem as:

$$SOL^* = (\mathbf{s}_{11}^*, \dots, \mathbf{s}_{nm}^*, \mathbf{tr}_{11}^*, \dots, \mathbf{tr}_{nm}^*, \mathbf{r}_{11}^*, \dots, \mathbf{r}_{nm}^*, \mathbf{er}_{11}^*, \dots, \mathbf{er}_{nm}^*, \mathbf{e}_{11}^*, \dots, \mathbf{e}_{nm}^*, \mathbf{y}_1^*, \dots, \mathbf{y}_m^*, \boldsymbol{\mu}_{11}^*, \dots, \boldsymbol{\mu}_{gm}^*)$$

In the case of the reformulated problem, a solution is defined similarly by adding values of the new variables at the end of the original solution vector:

$$\begin{aligned} \hat{SOL}^* &= (s_{11}^*, \dots, s_{nm}^*, tr_{11}^*, \dots, tr_{nm}^*, r_{11}^*, \dots, r_{nm}^*, er_{11}^*, \dots, er_{nm}^*, \\ &\quad e_{11}^*, \dots, e_{nm}^*, y_1^*, \dots, y_m^*, \mu_{11}^*, \dots, \mu_{gm}^*, tr_{11}^{s*}, \dots, tr_{nm}^{s*}, \\ &\quad tr_{11}^{e*}, \dots, tr_{nm}^{e*}, tr_{11}^{r*}, \dots, tr_{nm}^{r*}, \hat{tr}_{11}^{r*}, \dots, \hat{tr}_{nm}^{r*}, \\ &\quad \hat{r}_{11}^*, \dots, \hat{r}_{nm}^*, \hat{er}_{11}^*, \dots, \hat{er}_{nm}^*, \hat{e}_{11}^*, \dots, \hat{e}_{nm}^*) \\ &= (SOL^*, SOL_R^*). \end{aligned}$$

To show the equivalence of the original problem and the reformulated problem, the following remark is introduced.

Remark 2.1. The auxiliary variables w_{it} are nonnegative for all $i \in \mathcal{I}$ and $t \in \mathcal{T}$.

Proof. This remark can be demonstrated by contradiction. First, from constraint (r18), we know that

$$\begin{aligned} \hat{r}_{it} + \hat{tr}_{it}^r &\leq \hat{u}_{it} \Rightarrow u_{it} \cdot \hat{r}_{it} + u_{it} \cdot \hat{tr}_{it}^r \leq u_{it} \cdot \hat{u}_{it} \Rightarrow \\ r_{it} + tr_{it}^r &\leq u_{it} \text{ (by definition of } w_{it}) \Rightarrow r_{it} + tr_{it}^r \leq w_{it} + r_{it} + tr_{it} \Rightarrow \\ w_{it} &\geq tr_{it}^r - tr_{it}. \end{aligned}$$

Now, for the sake of contradiction, let us suppose that $w_{it} < 0$. Then,

$$\begin{aligned} tr_{it}^r - tr_{it} &< 0 \Rightarrow tr_{it} = 1 \text{ and } tr_{it}^r = 0 \Rightarrow \\ tr_{it}^s &= 1 \text{ or } tr_{it}^e = 1 \text{ (by equation (29))} \Rightarrow \\ w_{it} &= u_{it} \cdot \hat{w}_{it} \cdot 0 = 0 \not< 0. \end{aligned}$$

□

The following proposition proves the equivalence between both problems, the original problem and the reformulated problem.

Proposition 2.2. *Let SOL^* be a feasible solution of the original problem; then, there exists an associated feasible solution of the reformulated problem, $\hat{SOL}^* = (SOL^*, SOL_R^*)$. Furthermore, let $\hat{SOL}^* = (SOL^*, SOL_R^*)$ be a feasible solution of the reformulated problem; then, is a feasible solution of the original problem.*

Proof. Given a feasible solution of the original problem, SOL^* , it is trivial to prove that it has an associated feasible solution in the reformulated problem by considering each $i \in \mathcal{I}$, $t \in \mathcal{T}$, $tr_{it}^s = tr_{it}^e = tr_{it}^r = \hat{tr}_{it}^r = tr_{it}^*$, $\hat{r}_{it} = r_{it}^*$, $\hat{er}_{it} = er_{it}^*$ and $\hat{e}_{it} = e_{it}^*$.

In addition, we will prove that a feasible solution of the reformulated problem has an associated feasible solution in the original problem. Let us start by proving that constraint (r4) is equivalent to constraint (4). Due to constraint (31), for each $i \in \mathcal{I}$ and for each $t \in \mathcal{T}$,

$$A_i \cdot \mathbf{w}_{it} \leq \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} \mathbf{tr}_{it'}^s \leq \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} \mathbf{tr}_{it'}$$

The equivalence between constraints (r7) and (7) is also trivial.

In order to prove the equivalence between constraint (r8) and constraint (8), let us consider the case where $ITW_i = 0$ and $IOW_i = 0$ (the other case is analogous). Then, for each $i \in \mathcal{I}$ and for each $t \in \mathcal{T}$, we have

$$\mathbf{cr}_{it} := \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} (t+1-t') \cdot \mathbf{s}_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} (t-t') \cdot \mathbf{e}_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} \mathbf{r}_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} WP_i \cdot \mathbf{er}_{it'}$$

Now, if period $t^* \in \mathcal{T}$ where $\mathbf{e}_{it^*} = 1$ is considered, for all $t \leq t^*$,

$$\begin{aligned} \mathbf{cr}_{it} &= \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} (t+1-t') \cdot \mathbf{s}_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} \mathbf{r}_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} WP_i \cdot \mathbf{er}_{it'} \\ &= \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} (t+1-t') \cdot \mathbf{s}_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} \mathbf{u}_{it'} \hat{\mathbf{r}}_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} WP_i \cdot \mathbf{u}_{it'} \hat{\mathbf{er}}_{it'} \\ &= \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} (t+1-t') \cdot \mathbf{s}_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} \hat{\mathbf{r}}_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} WP_i \cdot \hat{\mathbf{er}}_{it'} \\ &= \hat{\mathbf{cr}}_{it}, \end{aligned}$$

where the second equation is because of constraints (27) and (28). The third equality is due to the following:

- If $\hat{\mathbf{r}}_{it} = 1$, by definition of $\hat{\mathbf{w}}_{it}$ and Remark 2.1, it is clear that the variable $\hat{\mathbf{u}}_{it} = 1$. Otherwise, if $\hat{\mathbf{r}}_{it} = 0$, the equality is trivial.
- If $\hat{\mathbf{er}}_{it} = 1$, then by constraint (r10) (if $t \geq RP_i$) or by constraint (r11) (if $t < RP_i$), it can be deduced that $\hat{\mathbf{r}}_{it} = 1$. Then, applying the previous item, we know that $\hat{\mathbf{u}}_{it} = 1$. Otherwise, if $\hat{\mathbf{er}}_{it} = 0$, the equality is trivial.

In the cases where $\hat{\mathbf{u}}_{it} = 1$, considering the definitions of the auxiliary variables \mathbf{u}_{it} and $\hat{\mathbf{u}}_{it}$, we have that

$$\hat{\mathbf{u}}_{it} = \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} \mathbf{s}_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^{t-1}} \hat{\mathbf{e}}_{it'} = 1 \Rightarrow \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} \mathbf{s}_{it'} = 1$$

and therefore²

$$\mathbf{u}_{it} = \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} \mathbf{s}_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^{t-1}} \mathbf{e}_{it'} = 1 - \sum_{t' \in \mathcal{T}^{t-1}} \mathbf{e}_{it'} = 1$$

proving that if $\hat{\mathbf{r}}_{it} = 1$ or $\hat{\mathbf{er}}_{it} = 1$, then $\mathbf{u}_{it} = 1$ for all $t \leq t^*$.

²Note that $\sum_{t' \in \mathcal{T}^{t-1}} \mathbf{e}_{it'} = 0$ for all $t \leq t^*$ since $\mathbf{e}_{it^*} = 1$ by assumption.

Hence, we have proved that constraint (8) holds for all $t \leq t^*$,

$$0 \leq \mathbf{c}\mathbf{r}_{it} = \hat{\mathbf{c}}\mathbf{r}_{it} \leq WP_i.$$

Otherwise, if $t > t^*$, the proof is similar since the expression of $\mathbf{c}\mathbf{r}_{it'}$ takes the same value for periods $t' > t^*$. This is because $u_{it'} = 0$ for all $t' > t^*$,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}\mathbf{r}_{it} &= \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} (t+1-t') \cdot \mathbf{s}_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} (t-t') \cdot \mathbf{e}_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} \mathbf{r}_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} WP_i \cdot \mathbf{e}\mathbf{r}_{it'} \\ &= \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} (t+1-t') \cdot \mathbf{s}_{it'} - (t-t^*) - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} \mathbf{u}_{it'} \cdot \hat{\mathbf{r}}_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} WP_i \cdot \mathbf{u}_{it'} \hat{\mathbf{e}}\mathbf{r}_{it'} \\ &= \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} (t+1-t') \cdot \mathbf{s}_{it'} - (t-t^*) - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} \hat{\mathbf{r}}_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} WP_i \cdot \hat{\mathbf{e}}\mathbf{r}_{it'} \\ &= \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} (t+1-t') \cdot \mathbf{s}_{it'} - \left(\sum_{t' \in \mathcal{T}^t} \mathbf{s}_{it'} \right) \cdot (t-t^*) - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} \hat{\mathbf{r}}_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^t} WP_i \cdot \hat{\mathbf{e}}\mathbf{r}_{it'} \\ &= \sum_{t' \in \mathcal{T}^{t^*}} (t^*+1-t') \cdot \mathbf{s}_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^{t^*}} \hat{\mathbf{r}}_{it'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}^{t^*}} WP_i \cdot \hat{\mathbf{e}}\mathbf{r}_{it'} \\ &= \hat{\mathbf{c}}\mathbf{r}_{it^*}. \end{aligned}$$

In the second equality, we use that $e_{it'} = 0$ for all $t' \neq t^*$ and constraints (27) and (28). The third equality can be proven using a procedure similar to that used for the case $t \leq t^*$. The fourth equality is because of the definition of \mathbf{u}_{it} and the fact that $\hat{\mathbf{u}}_{it} \geq 0$ by constraint (18), which implies that $\sum_{t' \in \mathcal{T}^t} \mathbf{s}_{it'} = 1$. Finally, the fifth equation results from the fact that $\hat{\mathbf{r}}_{it} = 0$ and $\hat{\mathbf{e}}\mathbf{r}_{it} = 0$ for all $t > t^*$.

Hence, we have proven that constraint (8) also holds for all $t > t^*$,

$$0 \leq \mathbf{c}\mathbf{r}_{it} = \hat{\mathbf{c}}\mathbf{r}_{it^*} \leq WP_i.$$

The proof of equivalence related to constraints (r9)-(r12), is similar to those already proved, but the following considerations are important:

1. The equivalence between constraint (r9) and (9) can be proven by analyzing three different situations: $t \in (-\infty, t^* - RP_i + 1]$, $t \in (t^* - RP_i + 1, t^*)$ and $t \in (t^*, \infty)$. For the proof related to constraints (r10) and (r11) one must distinguish two cases: $t \in (-\infty, t^*]$ and $t \in (t^*, \infty)$. Finally, for constraint (r12), the proof must be done differentiating between the following cases: $t \in (-\infty, t^* - TRP_i]$, $t \in (t^* - TRP_i, t^* + TRP_i]$ and $t \in (t^* + TRP_i, \infty)$.
2. Furthermore, for constraints (r9) and (r12) it is necessary to consider the optimality of the solution to demonstrate the cases in which $t \leq t^*$ and $t \leq t^* + TRP_i$, respectively.

Finally, the equivalence between constraints (r18) and (18) is trivial using Remark 2.1:

$$0 \leq \mathbf{w}_{it} = \mathbf{u}_{it} - \mathbf{r}_{it} - \mathbf{t}\mathbf{r}_{it} \Rightarrow \mathbf{u}_{it} \geq \mathbf{r}_{it} + \mathbf{t}\mathbf{r}_{it}.$$

□

Once the equivalence between the original problem and its reformulation has been demonstrated, we proceed to apply the BD approach to the reformulated problem.

Benders Master Problem

The master problem seeks the containment of the forest fire without acknowledging the rest periods of the resources:

minimize (1)

subject to

$$(2), (3), (r4), (5), (6), (r7), (13), (14), (15), (16), (17), (18), (19), (31)$$

$$\forall (i, t) \in \mathcal{S}^*, \quad m \cdot s_{it} + \sum_{t' \in W_{it}^-} w_{it'} \leq m, \quad (32)$$

$$\forall (i, t) \in \mathcal{S}^*, \quad m \cdot s_{it} + \sum_{t' \in TR_{it}^-} tr_{it'}^r \leq m, \quad (33)$$

$$\forall (i, t) \in \mathcal{S}^*, \quad m \cdot s_{it} + \sum_{t' \in R_{it}^-} r_{it'} \leq m. \quad (34)$$

The variables of the Benders master Problem are the original variables: s_{it} , r_{it} , er_{it} , w_{it} , tr_{it}^s , tr_{it}^r and tr_{it}^e . Moreover, \mathcal{S}^* is the set of all the tuples that represent the resources and periods, $(i, t) \in \mathcal{I} \times \mathcal{T}$, where resource i starts in period t at some iteration of the algorithm, i.e.,

$$\mathcal{S}^* := \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} \mathcal{S}(\nu),$$

being

$$\mathcal{S}(\nu) := \{(i, t) \in \mathcal{I} \times \mathcal{T} : s_{it}(\nu) = 1\}.$$

Using the definition of \mathcal{S}^* , cuts (32), (33) and (34) impose where a given $(i, t) \in \mathcal{S}^*$ (i is a resource and t is a starting period) cannot work, rest and travel due to rest periods, respectively. This can be accomplished using the definition of the following sets:

$$\begin{aligned} W_{it}^- &:= \{t' \in \mathcal{T} : \hat{w}_{it'}(t) = 0\}, \\ TR_{it}^- &:= \{t' \in \mathcal{T} : \hat{tr}_{it'}^r(t) = 0\}, \\ R_{it}^- &:= \{t' \in \mathcal{T} : \hat{r}_{it'}(t) = 0\}, \end{aligned}$$

where $\hat{w}_{it'}(t)$, $\hat{tr}_{it'}^r(t)$ and $\hat{r}_{it'}(t)$ are the values of working, travel due to rest, and rest variables if resource i starts in period t , respectively.

It is important to note that the needed information to build cuts (32), (33) and (34) is obtained by solving the Benders subproblem defined below.

Benders Subproblem

The subproblem seeks to establish a correct policy of breaks considering when resources begin to work. As previously stated, knowing the beginning of the resources allows computing the break periods easily. Thus, the problem is greatly simplified:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}} \hat{w}_{it} \\ & \text{subject to} && \text{(r8), (r9), (r10), (r11), (r12), (r18), (26), (27), (28), (29), (30).} \end{aligned}$$

In the subproblem we employ the previous definition of the variables \hat{e}_{it} , \hat{r}_{it} , \hat{tr}_{it}^r and \hat{er}_{it} , and the expressions defining \hat{u}_{it} , \hat{w}_{it} and $\hat{c}r_{it}$. Additionally, the variables associated with the master problem (complicating variables) are fixed: $s_{it} = s_{it}^*$, $r_{it} = r_{it}^*$, $er_{it} = er_{it}^*$, $w_{it} = w_{it}^*$, $tr_{it}^s = tr_{it}^{s*}$, $tr_{it}^r = tr_{it}^{r*}$ and $tr_{it}^e = tr_{it}^{e*}$. Therefore, as these variables are fixed, constraints (27)-(30) become linear.

Remark 2.3. Since the objective function is fully defined in the master problem, in the subproblem, we consider that resources must work all they can. This is a necessary condition for the correct performance of the rest and for wildfire containment. Note that the subproblem only accounts for the feasibility of the solution given by the master problem.

Remark 2.4. As the structure of the subproblem shows, it is easy to check that the subproblem can be decomposed trivially by resources. We can do this because the constraints and objective functions do not share information on more than one resource. Thus, instead of solving the Benders subproblem, we can solve for each selected resource i (given from a solution of the Benders master problem). In addition, in order to obtain information on the resolution of these subproblems, we can remove constraints (27)-(30) to obtain information about the configuration of the rest periods. By doing so, the subproblem associated with resource i , which we will name **Benders subproblem i** , determines the maximum performance of resource i considering when it starts and the restrictions on rest period legislation.

Benders Algorithm

The pseudocode presented in Algorithm 1 defines the steps in the Benders algorithm in the context of our decomposition of the problem.

Algorithm 1 Adaptation of the Benders Algorithm

```
1:  $\nu \leftarrow 0$ 
2: while no new cuts do
3:    $\nu \leftarrow \nu + 1$ 
4:   Solve Benders Master Problem
5:   Get  $\mathcal{S}(\nu)$ 
6:   for  $(i, t)$  in  $\mathcal{S}(\nu)$  do
7:     if  $(i, t)$  not in  $\mathcal{S}^*$  then
8:       Solve Benders Subproblem  $i$ 
9:       Update  $\mathcal{S}^*$ ,  $W_{it}^-$ ,  $TR_{it}^-$  and  $R_{it}^-$ 
10:      Add the associated cuts given by constraints (32), (33) and (34)
```

It is important to note that three new types of cuts, (32), (33) and (34), are created to improve the convergence of the algorithm. The following remark will discuss the validity of the proposed cuts.

Remark 2.5. Constraints (32)-(34) are valid Benders cuts that allow us to give to the Benders master problem information of how a resource must act knowing its start period.

For a given $i \in \mathcal{I}$ and $t^s \in \mathcal{T}$ where $s_{it^s} = 1$, Benders subproblem i gives the configuration of work, travel associated with rest, and rest periods of resource i from its start period (t^s) until the last period (m). The configuration of work, travel and rest periods guarantees the feasibility of the Benders subproblem i (and consequently, the feasibility of the Benders subproblem).

Examining Benders master problem, constraint (32) fixes the working periods to 0 according to the solution of Benders subproblem i with $s_{it^s} = 1$. In a similar way, we can impose periods of no travel due to rest and periods of no rest using constraints (33) and (34), respectively.

If a solution proposed by the Benders master problem is infeasible for the reformulated problem, then the cuts generated in the next iteration will remove the solution as each Benders subproblem i will compute a feasible configuration for the resource i to construct the new cuts. Otherwise, if the solution is feasible for the reformulated problem, then it will be feasible for each Benders subproblem i and the associated cuts will admit it.

3. Fixed Activity Problem

Inspired by the idea of BD to eliminate the difficulties caused by the computation of the periods in which resources must rest, a new model was developed that guarantees convergence to the global optimum.

If the period in which a resource begins to work in the tasks of extinguishing fires and the initial conditions in which this resource starts to work are known, it is simple to compute the work and rest periods while analyzing the pertinent

legislation. Therefore, the BD algorithm can be simplified by computing this information a priori without needing to solve the Benders subproblems.

As described above in the proposed BD method, the Benders subproblems share information with the Benders master problem using the definition of cuts (32)-(34) based on the primal solution information.

In this way, the Benders master problem can be modified considering all the information a priori to define the auxiliary cuts, proposing the following model.

Fixed Activity Problem

minimize (1)

subject to

(2), (3), (r4), (5), (6), (r7), (13), (14), (15), (16), (17),
(18), (19), (31)

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad m \cdot s_{it} + \sum_{t' \in W_{it}^-} w_{it'} \leq m \quad (\text{r32})$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad m \cdot s_{it} + \sum_{t' \in TR_{it}^-} tr_{it'} \leq m \quad (\text{r33})$$

$$\forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \quad m \cdot s_{it} + \sum_{t' \in R_{it}^-} r_{it'} \leq m \quad (\text{r34})$$

Therefore, before creating the fixed activity problem, we need to compute sets W_{it}^- , TR_{it}^- and R_{it}^- (see Algorithm 2 for more details) to create constraints (r32)-(r34), respectively.

Algorithm 2 initializes a counter for the work periods (*WorkCounter*) for a given resource and start period. Suppose the resource was previously working in any wildfire ($ITW_i = 1$ or $IOW_i = 1$). This implies that two situations might occur: if the resource starts to work in the first period, the counter is updated with its initial information; and if the resource is resting, it cannot be selected during the wildfire's extinguishing.

Once all variables have been initialized, the counter is iteratively increased. Thus, when it reaches $WP_i - TRP_i$ working periods, the resource will perform the needed periods to rest. In this case, when the resting phase is finished, the counter is reset, and the procedure described above is repeated until the last period.

In addition, it is important to note that this new method allows incorporating on-demand rest policies, facilitating their adaptation to more complex contexts.

Algorithm 2 Compute work, travel and rest periods of a resource knowing its start period

Input: $i^* \in \mathcal{I}$ (selected resource), $t^* \in \mathcal{T}$ (start period)

```

1:  $WorkCounter \leftarrow 1$ 
2: if  $ITW_i = 1$  or  $IOW_i = 1$  then
3:   if  $t^* = 1$  then
4:      $WorkCounter \leftarrow CWP_i - CRP_i + 1$ 
5:   else if  $RP_i \neq 0$  then
6:      $WorkCounter \leftarrow WP_i + 1$ 
7:      $t^* \leftarrow m + 1$  (avoid starting working,  $t^* \geq m$ )
8:  $Work_{it}, Travel_{it}, Rest_{it} \leftarrow 0$ , for all  $i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}$ 
9:  $TravelCounter \leftarrow 0$ 
10: for  $t$  in  $\mathcal{T}_{i^*}$  do
11:   if  $t \geq m - TRP_{i^*} + 1$  then
12:      $WorkCounter \leftarrow WorkCounter + 1$ 
13:      $TravelCounter \leftarrow TravelCounter + 1$ 
14:      $Travel_{it} \leftarrow 1$ 
15:     continue
16:   else if  $WorkCounter \leq WP_i - TRP_i$  then
17:      $WorkCounter \leftarrow WorkCounter + 1$ 
18:      $Work_{it} \leftarrow 1$ 
19:   else if  $WorkCounter \leq WP_i$  then
20:      $WorkCounter \leftarrow WorkCounter + 1$ 
21:      $TravelCounter \leftarrow TravelCounter + 1$ 
22:      $Travel_{it} \leftarrow 1$ 
23:   else if  $WorkCounter \leq WP_i + RP_i$  then
24:      $WorkCounter \leftarrow WorkCounter + 1$ 
25:      $Rest_{it} \leftarrow 1$ 
26:   else if  $WorkCounter \leq WP_i + RP_i + TRP_i$  then
27:      $WorkCounter \leftarrow WorkCounter + 1$ 
28:      $TravelCounter \leftarrow TravelCounter + 1$ 
29:      $Travel_{it} \leftarrow 1$ 
30:   else
31:      $WorkCounter \leftarrow 1 + TRP_i$ 
32:      $TravelCounter \leftarrow TravelCounter + 1$ 
33:      $Travel_{it} \leftarrow 1$ 
return  $Work, Travel, Rest$ 

```

4. Computational results

This section studies the impact of the described solution techniques in different instances of the previously revisited wildfire suppression model. In order to evaluate the efficiency of these strategies, different experiments using a representative set of simulated instances of the problem have been conducted. To simplify the understanding of this work, we use the following nomenclature to denote the different algorithms:

- **OP**: Original Problem (Section 1.2).
- **AL**: A strategy based on Augmented Lagrangian decomposition (Section 2.1).
- **BP**: Branch and Price decomposition provided by SCIP (Section 2.2).

- **BD**: Benders Decomposition (Section 2.3).
- **FA**: Fixed Activity problem (Section 3).

The experiments were conducted using the Finisterrae II supercomputer, provided by Galicia Supercomputing Centre (CESGA), which consists of 306 nodes powered with two deca-core Intel Haswell 2680v3 CPUs with 128 GB of RAM connected through an Infiniband FDR network. The algorithms were implemented in `Python` version 3.6.8, employing `Gurobi` (version 8.1.0, Gurobi Optimization (2020)) and `SCIP` (version 6.0.1, Gleixner et al. (2018)) APIs. All the MILP models described previously were solved using Gurobi.

In order to compare the algorithms, we generated two sets of instances with different sizes (see details in Appendix A). The first test set corresponds to small instances for which all the algorithms can provide solutions for most of them. The second set contains large-scale instances based on realistic case studies. Since some of the proposed algorithms are not able to provide feasible solutions in a reasonable amount of computational time for larger instances, for the second test set, we only run the algorithms exhibiting better performance in small instances. Therefore, Subsection 4.1 explains the results of the small group of instances, and Subsection 4.2 analyses the performance of the algorithms in large-scale instances.

Regarding the configuration of the algorithms, the algorithms were applied with a stopping criterion based on a predefined computational time. Furthermore, in the ALD, the parameters β and λ are set to 0.3 and 1000, respectively. The goal is to compare the solutions obtained, in terms of the objective function, using the different techniques at the same threshold time. This time was selected considering the requirements of wildfire extinguishment services in real situations.

4.1. Performance analysis in small instances

In order to analyze the proposed solution techniques, we defined 16 different groups of small instances by combining resource groups (brigades, aircraft and machines) in different ways: using 2 or 4 members per group and setting the number of time periods to 10 or 15. Furthermore, for each group, we randomly generated 100 instances, which gave us a total of 1600 instances. The details of the size (numbers of variables and constraints) of the different groups of instances are shown in Table A.5.

Due to the high number of experiments conducted (16 cases and 100 instances per case), a useful method to compactly evaluate them is using performance profile graphs (Dolan and Moré, 2002).

Figure 2 shows the performance profile graphs of the computational time of the considered techniques. The left figure shows that the AL and BP algorithms are much slower than the other algorithms. BP cannot find feasible solutions

in the 10% of the cases within a time limit of 600 s. Furthermore, the right figure shows how FA obtains the best behavior since it manages to solve all the optimization instances in less time than OR and BD.

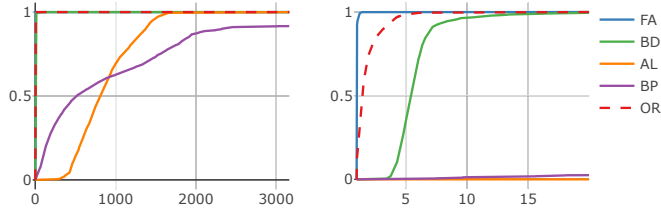


Figure 2: Performance profile of the computational time on the intervals $[1, 90]$ (left) and $[1, 20]$ (right).

Figure 3 represents the same results concerning the objective function. The figure on the left shows that all techniques, except BP, achieve good quality solutions (in terms of the objective function) in all instances. Similarly, as shown in the figure on the right, the FA, BD and OP methods have achieved the optimal solution in all instances. It is important to remark that a rate of 1.008 in the objective function is not low: the objective function has a penalization term that hides the real cost function of the problem.

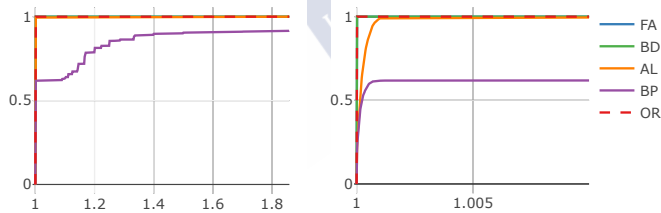


Figure 3: Performance profile of the objective function on the intervals $[1, 9]$ (left) and $[1, 1.01]$ (right).

In small instances, the algorithm that performs the best is FA. Additionally, the OP and BD algorithms work well, although the computational times are slightly lower. The AL and BP algorithms have much longer computational times, and BP does not converge in many cases.

4.2. Performance analysis in large instances

In this case, we have defined 48 different groups of large instances (see Table A.6 for details), generating 100 random instances for each group, which gives us a

total of 4800 instances.

Based on the results for the small instances, where OP and FA obtained better performance in terms of time and optimal objective value, we only focus on the results of these two methods to solve the mentioned large-scale cases. Furthermore, as the time threshold is set again to 10 min, the other algorithms are not able to reach a feasible solution for most of these instances.

Figure 4 shows the performance profile associated with the computational time of the algorithms. Again, FA has the best performance. It was faster than OP in 95% of the instances. Furthermore, in the right figure, FA is at least twice faster than OP in 60% of the instances (in 40% of the cases, OP is at most two times slower). Additionally, the boxplot of the computational times for each group of instances can be seen in Figure B.6.

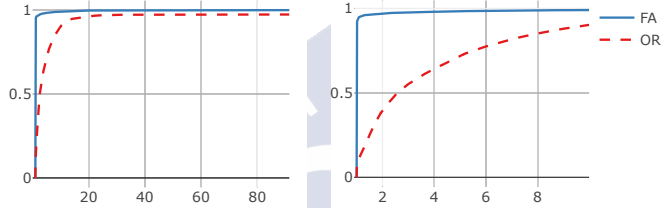


Figure 4: Performance profile of the computational time on the intervals $[1, 90]$ (left) and $[1, 10]$ (right).

In Figure 5, FA solves all instances while OP only obtains a feasible solution for approximately 95% of the instances. Moreover, both algorithms obtain the same objective values when solutions are feasible.

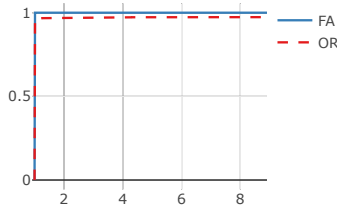


Figure 5: Performance profile of the objective function on the interval $[1, 9]$.

5. Conclusions

In this study, we have proposed different techniques to efficiently tackle a wildfire suppression model to manage the operations of resources.

Implementing decomposition techniques is not usually a straightforward task since it requires adapting the technique to the specific features of the problem. Thus, we have proposed a modification of the augmented Lagrangian decomposition to achieve convergence of our specific problem. Moreover, we have applied Benders and branch and price decompositions to our problem. In the case of Benders, to improve convergence to an optimal point, we have modified the decomposition and proposed new cuts specific to this problem.

Furthermore, the analysis of decomposition methods has encouraged us to propose the so-called fixed activity problem. It is a reformulation of the original problem, where some information about resources (such as rest, travel and working time) can be precomputed.

An extensive computational study comparing the different proposed alternatives using a set of randomly generated instances of the wildfire extinguishment model has been conducted. In the results, we observe that the fixed activity problem clearly outperforms the rest of the techniques in terms of optimality and computational times.

As future work, it could be interesting to seek alternative decomposition of the problem that allows us to apply the same or different decomposition techniques more efficiently. Furthermore, it might be promising to study how the fixed activity problem can be embedded in such a decomposition framework.

6. Acknowledgements

The research work was supported by grant MTM2016-76969-P and MTM2017-87197-C3 (1-P and 3-P) (Spanish State Research Agency). Second author investigation is funded by the Xunta de Galicia (contract post-doctoral 2019-2022). We acknowledge the computational resources provided by CESGA. Third author acknowledges support from the Xunta de Galicia through the ERDF (ED431C-2020-14 and ED431G 2019/01), and “CITIC”.

References

- Barnhart, C., Johnson, E.L., Nemhauser, G.L., Savelsbergh, M.W.P., Vance, P.H., 1998. Branch-and-price: Column generation for solving huge integer programs. *Operations Research* 46, 316–329.
- Benders, J., 1962. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik* 4, 238–252.

- Caunhye, A.M., Nie, X., Pokharel, S., 2012. Optimization models in emergency logistics: A literature review. *Socio-Economic Planning Sciences* 46, 4–13.
- Conejo, A., Castillo, E., Mínguez, R., García-Bertrand, R., 2006. Decomposition techniques in mathematical programming: engineering and science applications. Springer Science & Business Media.
- Dennison, P.E., Brewer, S.C., Arnold, J.D., Moritz, M.A., 2014. Large wildfire trends in the western united states, 1984–2011. *Geophysical Research Letters* 41, 2928–2933.
- Dolan, E.D., Moré, J.J., 2002. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming* 91, 201–213.
- European Commision, 2019. Forest fires in Europe, Middle East and North Africa 2018. Technical Report. JRC Technical Reports.
- Fisher, M.L., 2004. The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. *Management science* 50, 1861–1871.
- Gleixner, A., Bastubbe, M., Eifler, L., Gally, T., Gamrath, G., Gottwald, R.L., Hendel, G., Hojny, C., Koch, T., Lübbecke, M.E., Maher, S.J., Miltenberger, M., Müller, B., Pfetsch, M.E., Puchert, C., Rehfeldt, D., Schlösser, F., Schubert, C., Serrano, F., Shinano, Y., Viernickel, J.M., Walter, M., Wegscheider, F., Witt, J.T., Witzig, J., 2018. The SCIP Optimization Suite 6.0. Technical Report. Optimization Online. URL: http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2018/07/6692.html.
- Gurobi Optimization, L., 2020. Gurobi optimizer reference manual. URL: <http://www.gurobi.com>.
- Hamdi, A., Mishra, S.K., 2011. Decomposition methods based on augmented lagrangians: a survey, in: *Topics in nonconvex optimization*. Springer, pp. 175–203.
- Lee, W., 2006. A stochastic mixed integer programming approach to wildfire management systems. Texas A&M University.
- Martell, D.L., 2007. Forest fire management, in: *Handbook of operations research in natural resources*. Springer, pp. 489–509.
- Martins, I., Alvelos, F., Constantino, M., 2012. A branch-and-price approach for harvest scheduling subject to maximum area restrictions. *Computational Optimization and Applications* 51, 363–385.
- Mercier, A., Cordeau, J.F., Soumis, F., 2005. A computational study of benders decomposition for the integrated aircraft routing and crew scheduling problem. *Computers & Operations Research* 32, 1451–1476.
- Miller, C., Ager, A.A., 2013. A review of recent advances in risk analysis for wildfire management. *International Journal of Wildland Fire* 22, 1–14.

- Minas, J.P., Hearne, J.W., Handmer, J.W., 2012. A review of operations research methods applicable to wildfire management. *International Journal of Wildland Fire* 21, 189–196.
- Nishi, T., Ando, M., Konishi, M., 2005. Distributed route planning for multiple mobile robots using an augmented lagrangian decomposition and coordination technique. *IEEE Transactions on Robotics* 21, 1191–1200.
- Papadakos, N., 2009. Integrated airline scheduling. *Computers & Operations Research* 36, 176–195.
- Rahmaniani, R., Crainic, T.G., Gendreau, M., Rei, W., 2017. The benders decomposition algorithm: A literature review. *European Journal of Operational Research* 259, 801–817. doi:10.1016/j.ejor.2016.12.005.
- Rios, J., Ross, K., 2010. Massively parallel dantzig-wolfe decomposition applied to traffic flow scheduling. *Journal of Aerospace Computing, Information, and Communication* 7, 32–45.
- Rodríguez-Veiga, J., Ginzo-Villamayor, M.J., Casas-Méndez, B., 2018a. An integer linear programming model to select and temporally allocate resources for fighting forest fires. *Forests* 9, 583.
- Rodríguez-Veiga, J., Gómez-Costa, I., Ginzo-Villamayor, M.J., Casas-Méndez, B., Sáiz-Díaz, J.L., 2018b. Assignment problems in wildfire suppression: Models for optimization of aerial resource logistics. *Forest Science* 64, 504–514.
- Romanski, J., Hentenryck, P.V., 2016. Benders decomposition for large-scale prescriptive evacuations.
- Van Wassenhove, L.N., Pedraza Martinez, A.J., 2012. Using or to adapt supply chain management best practices to humanitarian logistics. *International Transactions in Operational Research* 19, 307–322.
- Vanderbeck, F., Savelsbergh, M.W., 2006. A generic view of dantzig-wolfe decomposition in mixed integer programming. *Operations Research Letters* 34, 296–306.
- Vanderbeck, F., Wolsey, L.A., 1996. An exact algorithm for IP column generation. *Operations Research Letters* 19, 151–159.
- Yang, Z., Guo, L., Yang, Z., 2019. Emergency logistics for wildfire suppression based on forecasted disaster evolution. *Annals of Operations Research* 283, 917–937.
- Zhou, S., Erdogan, A., 2019. A spatial optimization model for resource allocation for wildfire suppression and resident evacuation. *Computers & Industrial Engineering* 138, 106101.
- Úbeda, X., Sarricolea, P., 2016. Wildfires in chile: A review. *Global and Planetary Change* 146, 152–161.

A. Dimensions of the instances

| Brigades | Aircraft | Machines | Periods | Variables | Constraints |
|----------|----------|----------|---------|-----------|-------------|
| 2 | 2 | 2 | 10 | 340 | 521 |
| 2 | 2 | 2 | 15 | 510 | 766 |
| 2 | 2 | 4 | 10 | 440 | 671 |
| 2 | 2 | 4 | 15 | 660 | 986 |
| 2 | 4 | 2 | 10 | 440 | 671 |
| 2 | 4 | 2 | 15 | 660 | 986 |
| 2 | 4 | 4 | 10 | 540 | 821 |
| 2 | 4 | 4 | 15 | 810 | 1206 |
| 4 | 2 | 2 | 10 | 440 | 671 |
| 4 | 2 | 2 | 15 | 660 | 986 |
| 4 | 2 | 4 | 10 | 540 | 821 |
| 4 | 2 | 4 | 15 | 810 | 1206 |
| 4 | 4 | 2 | 10 | 540 | 821 |
| 4 | 4 | 2 | 15 | 810 | 1206 |
| 4 | 4 | 4 | 10 | 640 | 971 |
| 4 | 4 | 4 | 15 | 960 | 1426 |

Table A.5: Dimensions of the problems.

| Brigades | Aircraft | Machines | Periods | Variables | Constraints |
|----------|----------|----------|---------|-----------|-------------|
| 5 | 5 | 5 | 10 | 790 | 1196 |
| 5 | 5 | 5 | 20 | 1580 | 2316 |
| 5 | 5 | 5 | 30 | 2370 | 3436 |
| 5 | 5 | 5 | 40 | 3160 | 4556 |
| 5 | 5 | 5 | 50 | 3950 | 5676 |
| 5 | 5 | 5 | 60 | 4740 | 6796 |
| 5 | 5 | 20 | 10 | 1540 | 2321 |
| 5 | 5 | 20 | 20 | 3080 | 4491 |
| 5 | 5 | 20 | 30 | 4620 | 6661 |
| 5 | 5 | 20 | 40 | 6160 | 8831 |
| 5 | 5 | 20 | 50 | 7700 | 11001 |
| 5 | 5 | 20 | 60 | 9240 | 13171 |
| 5 | 20 | 5 | 10 | 1540 | 2321 |
| 5 | 20 | 5 | 20 | 3080 | 4491 |
| 5 | 20 | 5 | 30 | 4620 | 6661 |
| 5 | 20 | 5 | 40 | 6160 | 8831 |
| 5 | 20 | 5 | 50 | 7700 | 11001 |
| 5 | 20 | 5 | 60 | 9240 | 13171 |
| 5 | 20 | 20 | 10 | 2290 | 3446 |
| 5 | 20 | 20 | 20 | 4580 | 6666 |
| 5 | 20 | 20 | 30 | 6870 | 9886 |
| 5 | 20 | 20 | 40 | 9160 | 13106 |
| 5 | 20 | 20 | 50 | 11450 | 16326 |
| 5 | 20 | 20 | 60 | 13740 | 19546 |
| 20 | 5 | 5 | 10 | 1540 | 2321 |
| 20 | 5 | 5 | 20 | 3080 | 4491 |
| 20 | 5 | 5 | 30 | 4620 | 6661 |
| 20 | 5 | 5 | 40 | 6160 | 8831 |
| 20 | 5 | 5 | 50 | 7700 | 11001 |
| 20 | 5 | 5 | 60 | 9240 | 13171 |
| 20 | 5 | 20 | 10 | 2290 | 3446 |
| 20 | 5 | 20 | 20 | 4580 | 6666 |
| 20 | 5 | 20 | 30 | 6870 | 9886 |
| 20 | 5 | 20 | 40 | 9160 | 13106 |
| 20 | 5 | 20 | 50 | 11450 | 16326 |
| 20 | 5 | 20 | 60 | 13740 | 19546 |
| 20 | 20 | 5 | 10 | 2290 | 3446 |
| 20 | 20 | 5 | 20 | 4580 | 6666 |
| 20 | 20 | 5 | 30 | 6870 | 9886 |
| 20 | 20 | 5 | 40 | 9160 | 13106 |
| 20 | 20 | 5 | 50 | 11450 | 16326 |
| 20 | 20 | 5 | 60 | 13740 | 19546 |
| 20 | 20 | 20 | 10 | 3040 | 4571 |
| 20 | 20 | 20 | 20 | 6080 | 8841 |
| 20 | 20 | 20 | 30 | 9120 | 13111 |
| 20 | 20 | 20 | 40 | 12160 | 17381 |
| 20 | 20 | 20 | 50 | 15200 | 21651 |
| 20 | 20 | 20 | 60 | 18240 | 25921 |

Table A.6: Dimensions of the problems in large cases.

B. Auxiliary Figures

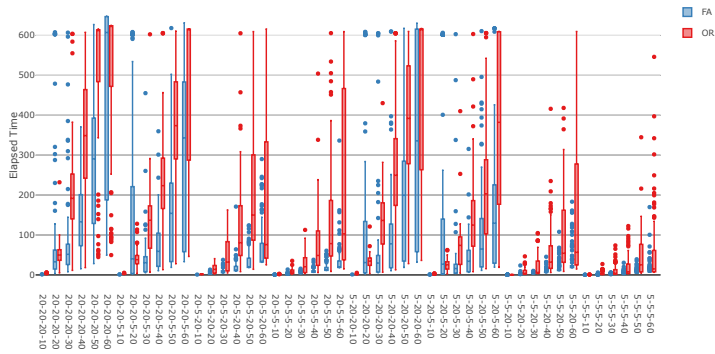


Figure B.6: **Boxplot of the computational time of the algorithm only considering the solved instances.** X axis represent the size of the instances, representing the numbers separated by hyphens the number of brigades, aircraft, machines and periods, respectively.

5.4. *Assignment problems in wildfire suppression: models for optimization of aerial resource logistics*

Referencia del artículo

J. Rodríguez-Veiga, I. Gómez-Costa, M. J. Ginzo-Villamayor y col., «Assignment problems in wildfire suppression: Models for optimization of aerial resource logistics,» *Forest Science*, vol. 64, n.º 5, págs. 504-514, 2018

Filiación autores: Jorge Rodríguez-Veiga¹, Iván Gómez-Costa², María José Ginzo-Villamayor³, Balbina Casas-Méndez^{3,4}, José Luís Sáiz-Díaz⁵.

Contribución: Modelado, implementación, simulaciones y redacción del artículo.

Factor de impacto: 1.058.

Categoría: Forestry-scie.

Posición relativa: N^o 44 de un total de 67 (Q3).

Citas scopus: 3.

Citas Google: 8.

ISSN: 1938-3738.

Enlace: <https://academic.oup.com/forestscience/>

¹Departamento de Estadística, Análisis Matemático y Optimización, Universidad de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, España.

²INDRA, Technology and Consulting, A Coruña, España.

³Grupo de Investigación Modesty, Departamento de Estadística, Análisis Matemático y Optimización, Universidad de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, España.

⁴Facultad de Matemáticas, Campus Vida s/n 15782 Santiago de Compostela, España.

⁵INAER, Babcock Internacional España, Alicante, España.

5.5. *Wildfire resources management: a decision support tool created with R to solve optimization models in logistics for fighting forest fires*

Referencia del capítulo

J. Rodríguez Veiga, M. J. Ginzo Villamayor y B. V. Casas Méndez, «Wildfire resources management: a decision support tool created with R to solve optimization models in logistics for fighting forest fires,» en *Progress in Industrial Mathematics: Success Stories*, M. Cruz, C. Parés y P. Quintela, eds., vol. 5, Springer International Publishing, 2021, págs. 227-246

Filiación autores: Jorge Rodríguez-Veiga¹²³⁴⁵, María José Ginzo-Villamayor¹²³⁴⁵, Balbina Casas-Méndez¹²³⁴⁵.

Contribución: Modelado, implementación, simulaciones y revisión de la redacción del capítulo.

Citas scopus: 0.

Citas Google: 0.

ISSN: 2662-7183.

Enlace: <https://www.springerprofessional.de>

¹Departamento de Estadística, Análisis Matemático y Optimización

²Instituto de Matemáticas (IMAT), España.

³Instituto Tecnológico de Matemática Industrial (ITMATI), España.

⁴Grupo de Modelos de Optimización, Decisión, ESTadística Y Aplicaciones (MODESTYA), España.

⁵Universidad de Santiago de Compostela, España.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

El trabajo realizado en la tesis contempla el cálculo de soluciones en problemas de investigación operativa. En concreto se estudia el cálculo de soluciones en dos ámbitos, la teoría de juegos, en juegos de mayoría ponderada y mayoría ponderada múltiple con configuración de coaliciones, y la optimización, en la gestión de recursos en la contención de incendios forestales.

En la Sección 6.1 se describen las conclusiones y trabajo futuro respecto al cálculo de soluciones en juegos de mayoría ponderada múltiple. En la Sección 6.2 se describen las conclusiones y trabajo futuro respecto al cálculo de soluciones para una gestión eficiente de los recursos que participan en la contención de un incendio forestal. En ambas secciones se describen las conclusiones del trabajo realizado y las posibles líneas de trabajos para continuar las investigaciones realizadas.

Cabe resaltar que todos los trabajos realizados fueron acompañados de la programación de los modelos matemáticos o algoritmos allí descritos. Además, se pretendió profundizar en los detalles matemáticos aplicando y demostrando resultados teóricos sobre los problemas planteados. En el caso de los índices de poder, mediante el empleo de las funciones generatrices, y en el caso de la gestión de recursos en la contención de incendios forestales, mediante la aplicación de técnicas de descomposición y reformulaciones del problema para mejorar la eficiencia en la resolución del problema SARC.

Por último, señalar que en función de las necesidades que fueron surgiendo a lo largo de la tesis, se optó por el empleo de diferentes lenguajes de modelado algebraico y de programación.

6.1. Índices de poder

Dado que Albizuri y Aurrekoetxea [3] y Albizuri, Aurrekoetxea y Zarzuelo [2] introdujeron el índice de Banzhaf-Coleman generalizado y el índice con configuración, respectivamente, para juegos simples con configuraciones de coalición, como complemento a la definición y el estudio de sus propiedades realizados en estos documentos, una pregunta abierta era el cálculo eficiente de estos índices mediante las llamadas funciones generatrices, en línea con estudios similares relacionados.

En la Sección 5.1 se presenta el cálculo del índice con configuración y Banzhaf-Coleman generalizado mediante el empleo de funciones generatrices. Se presenta el cálculo de los índices demostrando matemáticamente su idoneidad, completando el artículo con la implementación del algoritmo utilizando una herramienta de software libre como R [65] y la presentación de ejemplos de la vida real que muestra el alcance del modelo considerado y los algoritmos introducidos.

Por último se realiza una extensión de los algoritmos a la clase más amplia de juegos de mayoría ponderada múltiple.

Creemos que podría ser de interés extender estas técnicas a clases más amplias de juegos como los juegos simples monótonos, comenzando por los que no contienen restricciones en la comunicación. Para esta tarea, puede ser de ayuda el trabajo de Freixas y Puente [37]. En este trabajo, se establece explícitamente lo siguiente: *“This question is solved in this paper, by means of a constructive proof, which provides a way to represent any complete simple game with minimum as the intersection of a number m of weighted majority games, where m coincides with its dimension”*. Sin embargo, para los juegos de utilidad general transferibles, existe otra técnica de cálculo habitual que podría explorarse en el contexto actual y se basa en las llamadas extensiones multilineales (ver, por ejemplo, los artículos de Owen [62] y [61]). Por otra parte, también cabe señalar que el modelo de juegos cooperativos con configuraciones

de coalición estudiado en este trabajo, está siendo de gran interés tal y como recogen los trabajos de Albizuri y Vidal-Puga [4] o Andjiga y Courtin [9], entre otros. Por último, también cabría considerar nuevos tipos de restricciones en la comunicación de los jugadores. Por ejemplo, la estructura de configuración de coaliciones, podría verse enriquecida con la inclusión de jugadores incompatibles [57]. Por todo ello, se cree interesante explorar juegos con nuevas restricciones en la comunicación, empleando para el cálculo de sus índices los algoritmos introducidos en esta tesis u otras herramientas de análisis combinatorio como las propuestas en el trabajo de Neto [56].

También cabe destacar, como trabajo futuro, la necesidad de realizar un estudio de la complejidad de los algoritmos definidos en la Sección 5.1. Es importante saber la complejidad del algoritmo para poder realizar una comparativa entre distintos métodos de cálculo de soluciones. Además, sería de gran utilidad un análisis de los tiempos de computación entre distintos algoritmos de cálculo de soluciones en el contexto establecido. En muchas ocasiones, debido al gran número de jugadores involucrados en procesos de votación reales, estos cálculos se hacen de forma muy ineficiente. Es por ello que realizar un estudio de la eficiencia de los métodos podría aportar gran valor.

6.2. Gestión de recursos en la contención de incendios forestales

En las Secciones 5.2 y 5.4 se describen tres modelos de investigación operativa para la gestión de recursos en incendios forestales. Los modelos propuestos surgen de la colaboración con la empresa Babcock España. El modelo propuesto para la resolución del problema **SARC** extiende el propuesto por Donovan y Rideout [29]. Además, pese a que los problemas **AARV** y **AAPR** surgen de forma habitual en la gestión de incendios forestales, no se encontró literatura donde se les diese solución.

De los problemas anteriormente mencionados, en esta tesis se establece la relación que existe entre los mismos. Así, se genera conocimiento susceptible de ser transferido a las empresas encargadas de la extinción de

incendios. Las empresas interesadas podrían disponer de una herramienta de apoyo a la toma de decisiones para la contención de un incendio forestal, que junto con la experiencia de los pilotos y brigadas, permitan realizar contenciones más eficientes y seguras.

Para el problema **SARC**, se modela un problema MILP, a partir del cual se consigue una solución que minimiza los costes de la operación de extinción. Los resultados ofrecen beneficios económicos y, lo que es más importante, permiten una mejora en la eficiencia de las tareas de extinción, haciendo que las tareas sean más seguras y poderosas para la defensa del medio natural. Además, tras el estudio de simulación realizado, se concluye que es posible obtener soluciones exactas del problema sin necesidad de utilizar algoritmos heurísticos. La eficiencia en la resolución de los modelos, se debe en parte al trabajo realizado en la Sección 5.3. El trabajo realizado al aplicar distintas técnicas de descomposición, junto con el conocimiento del modelo, inspira una reformulación del problema que mejora los resultados obtenidos en el artículo original. Esta conclusión se obtiene después de realizar un estudio de simulación con diversas baterías de problemas, variando la dimensión y características del problema en más de 6000 instancias.

Para los problemas **AARV** y **AAPR**, también se trabaja con dos problemas MILP. En varios ejemplos inspirados en situaciones reales, se observa que la resolución del modelo es rápida teniendo en cuenta los tiempos que pueden manejar los coordinadores aéreos. Estas características, en nuestra opinión, permiten ayudar a los coordinadores de control de tráfico aéreo en la toma de decisiones. Para la obtención de estas conclusiones nos apoyamos en el estudio de simulación realizado, el cual revela los tiempos de resolución ante más de 2000 instancias para cada uno de los modelos propuestos.

Como trabajo futuro, no respaldamos un modelo único que aúne los tres problemas definidos, debido a los costes computacionales asociados y la separación natural de los mismos. Sin embargo, sí creemos que puede ser interesante estudiar otros problemas de gestión de recursos en la contención de incendios forestales, y buscar cómo pueden encajar estos nuevos problemas en el contexto establecido.

La creación de una herramienta integrada que reúna los datos necesarios y otorgue posibles soluciones a la gestión de los recursos, podrá

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

ser de gran valor para la protección de los bosques, la seguridad de las operaciones de extinción y la reducción de los costes a las empresas y administraciones involucradas.

Además, creemos que es de gran interés enriquecer algunos modelos al considerar incertidumbre en ciertos parámetros (la evolución del perímetro y costes del incendio, rendimiento de los recursos...). Sobre el modelo del problema **SARC**, tiene sentido considerar incertidumbre en el rendimiento de los recursos, así como en la evolución del incendio forestal. La misma consideración puede ser interesante para el modelo del problema **AARV**, añadiendo incertidumbre sobre la eficiencia de los recursos aéreos durante el incendio forestal (dependiendo de los factores climatológicos y la situación de sequía del terreno, entre otros). Sin embargo, no consideramos interesante la incorporación de incertidumbre sobre el modelo del problema **AAPR**. En este caso los parámetros del modelo deberían ser considerados deterministas por tener gran control sobre los mismos.

Por último, mencionar que aunque nuestros modelos han sido probados usando parámetros y datos realistas, los resultados no pudieron ser verificados usando datos históricos. Es difícil obtener datos específicos de la asignación de los recursos, aunque es más fácil obtener datos globales. Enfatizamos la recomendación de que las administraciones públicas y las agencias de aviación consideren la importancia de los datos y su disponibilidad.



Bibliografía

- [1] M. J. Albizuri, «An axiomatization of the modified Banzhaf Coleman index.,» *International Journal of Game Theory*, vol. 30, n.º 2, págs. 167-176, 2001.
- [2] M. J. Albizuri, J. Aurrecoetxea y J. M. Zarzuelo, «Configuration values: Extensions of the coalitional Owen value,» *Games and Economic Behavior*, vol. 57, n.º 1, págs. 1-17, 2006.
- [3] M. J. Albizuri y J. Aurrekoetxea, «Coalition configurations and the Banzhaf index,» *Social Choice and Welfare*, vol. 26, n.º 3, págs. 571-596, 2006.
- [4] M. J. Albizuri y J. Vidal-Puga, «Values and coalition configurations,» *Mathematical Methods of Operations Research*, vol. 81, n.º 1, págs. 3-26, 2015.
- [5] E. Algaba, J. M. Bilbao, J. F. García y J. López, «Computing power indices in weighted multiple majority games,» *Mathematical Social Sciences*, vol. 46, n.º 1, págs. 63-80, 2003.
- [6] J. M. Alonso-Meijide y C. Bowles, «Generating functions for coalitional power indices: An application to the IMF,» *Annals of Operations Research*, vol. 137, n.º 1, págs. 21-44, 2005.
- [7] J. M. Alonso-Meijide, J. M. Bilbao, B. Casas-Méndez y J. R. Fernández, «Weighted multiple majority games with unions: Generating functions and applications to the European Union,» *European Journal of Operational Research*, vol. 198, n.º 2, págs. 530-544, 2009.

- [8] R. Amer, F. Carreras y J. M. Giménez, «The modified Banzhaf value for games with coalition structure: an axiomatic characterization,» *Mathematical Social Sciences*, vol. 43, n.º 1, págs. 45-54, 2002.
- [9] N. G. Andjiga y S. Courtin, «Coalition configurations and share functions,» *Annals of Operations Research*, vol. 225, n.º 1, págs. 3-25, 2015.
- [10] C. Babbage, *On the Economy of Machinery and Manufactures*. Charles Knight, 1832.
- [11] J. F. Banzhaf III, «Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis,» *Rutgers Law Review*, vol. 19, n.º 2, págs. 317-343, 1965.
- [12] C. Barnhart, E. L. Johnson, G. L. Nemhauser, M. W. Savelsbergh y P. H. Vance, «Branch-and-price: Column generation for solving huge integer programs,» *Operations Research*, vol. 46, n.º 3, págs. 316-329, 1998.
- [13] M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis y H. D. Sherali, *Linear programming and network flows*. John Wiley & Sons, 2008.
- [14] J. F. Benders, «Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems,» *Numerische Mathematik*, vol. 4, n.º 1, págs. 238-252, 1962.
- [15] M. Berkelaar y col., *lpSolve: Interface to 'Lp_solve' v. 5.5 to Solve Linear/Integer Programs*, Available at <https://CRAN.R-project.org/package=lpSolve>, 2015.
- [16] J. R. Birge y F. Louveaux, *Introduction to stochastic programming*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [17] S. P. Bradley, A. C. Hax y T. L. Magnanti, *Applied mathematical programming*. Addison-Wesley, 1977.
- [18] M. V. Brage, «Contribuciones a la teoría del valor en juegos con utilidad transferible,» Tesis doct., Universidade de Santiago de Compostela, Departamento de Estadística e Investigación Operativa, 1998.

- [19] S. J. Brams y P. J. Affuso, «Power and size: A new paradox,» *Theory and Decision*, vol. 7, n.º 1-2, págs. 29-56, 1976.
- [20] E. Calvo, J. J. Lasaga y E. Winter, «The principle of balanced contributions and hierarchies of cooperation,» *Mathematical Social Sciences*, vol. 31, n.º 3, págs. 171-182, 1996.
- [21] W. Chang y B. Borges Ribeiro, *shinydashboard: Create Dashboards with 'Shiny'*, R package version 0.7.1. Available at <https://CRAN.R-project.org/package=shinydashboard>, 2018.
- [22] K. C. Clarke, J. A. Brass y P. J. Riggan, «A cellular automaton model of wildfire propagation and extinction,» *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*. 60 (11): 1355-1367, vol. 60, n.º 11, págs. 1355-1367, 1994.
- [23] COIN-OR, *SYMPHONY*, Available at <https://github.com/coin-or/SYMPHONY>, 2019. dirección: <http://doi.org/10.5281/zenodo.2576603>.
- [24] J. S. Coleman, «Control of collectivities and the power of a collectivity to act,» en *Social choice*, B. Lieberman, ed., Gordon y Breach, 1971, págs. 269-300.
- [25] A. J. Conejo, E. Castillo, R. Minguez y R. García-Bertrand, *Decomposition techniques in mathematical programming: engineering and science applications*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [26] A. J. Conejo, F. J. Nogales y F. J. Prieto, «A decomposition procedure based on approximate Newton directions,» *Mathematical Programming*, vol. 93, n.º 3, págs. 495-515, 2002.
- [27] G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, 1963.
- [28] G. B. Dantzig y P. Wolfe, «Decomposition principle for linear programs,» *Operations Research*, vol. 8, n.º 1, págs. 101-111, 1960.

- [29] G. H. Donovan y D. B. Rideout, «An integer programming model to optimize resource allocation for wildfire containment,» *Forest Science*, vol. 49, n.º 2, págs. 331-335, 2003.
- [30] I. Dragan, T. Driessen e Y. Funaki, «Collinearity between the Shapley value and the egalitarian division rules for cooperative games,» *Operations-Research-Spektrum*, vol. 18, n.º 2, págs. 97-105, 1996.
- [31] P. Dubey, «On the uniqueness of the Shapley value,» *International Journal of Game Theory*, vol. 4, n.º 3, págs. 131-139, 1975.
- [32] P. Dubey y L. S. Shapley, «Mathematical properties of the Banzhaf power index,» *Mathematics of Operations Research*, vol. 4, n.º 2, págs. 99-131, 1979.
- [33] V. Feltkamp, «Alternative axiomatic characterizations of the Shapley and Banzhaf values,» *International Journal of Game Theory*, vol. 24, n.º 2, págs. 179-186, 1995.
- [34] M. A. Finney, *FARSITE: Fire Area Simulator - Model Development and Evaluation*. United States Department of Agriculture, Forest Service, Rocky Mountain Research Station, 1998, vol. 3.
- [35] C. A. Floudas, *Nonlinear and mixed-integer optimization: fundamentals and applications*. Oxford University Press, 1995.
- [36] R. Fourer, D. M. Gay y B. W. Kernighan, «A modeling language for mathematical programming,» *Management Science*, vol. 36, n.º 5, págs. 519-554, 1990.
- [37] J. Freixas y M. A. Puente, «Dimension of complete simple games with minimum,» *European Journal of Operational Research*, vol. 188, n.º 2, págs. 555-568, 2008.
- [38] A. M. Geoffrion, «Generalized Benders decomposition,» *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 10, n.º 4, págs. 237-260, 1972.

- [39] D. B. Gillies, «Solutions to general non-zero-sum games,» en *Contributions to the Theory of Games*, A. W. Tucker y R. D. Luce, eds., vol. 4, Princeton University Press, 1959, págs. 47-85.
- [40] Gobierno de España. Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación, *Los Incendios Forestales en España: 1 enero – 31 diciembre 2018 Avance Informativo*, https://www.mapa.gob.es/es/desarrollo-rural/estadisticas/iiff_2018_tcm30-507741.pdf, Accessed:14 de junio de 2021, 2019.
- [41] J. K. Gorte y R. W. Gorte, «Application of economic techniques to fire management-a status review and evaluation,» *Gen. Tech. Rep. INT-GTR-53. Ogden, UT: US Department of Agriculture, Forest Service, Intermountain Research Station. 26 p.*, vol. 53, 1979.
- [42] L. Gurobi Optimization, *Gurobi Optimizer Reference Manual*, Available at <http://www.gurobi.com>, 2020.
- [43] A. Hamdi y S. K. Mishra, «Decomposition methods based on augmented Lagrangians: a survey,» en *Topics in nonconvex optimization*, Springer, 2011, págs. 175-203.
- [44] R. Headley, «Fire Suppression, District 5,» *USDA-Forest Service. 57 p.*, págs. 1-57, 1916.
- [45] L. S. Lasdon, *Optimization theory for large systems*. Courier Corporation, 2002.
- [46] E. L. Lawler y D. E. Wood, «Branch-and-bound methods: A survey,» *Operations Research*, vol. 14, n.º 4, págs. 699-719, 1966.
- [47] C. Lemaréchal, «Lagrangian relaxation,» en *Computational combinatorial optimization*, Springer, 2001, págs. 112-156.
- [48] W. F. Lucas, «Measuring power in weighted voting systems,» en *Political and related models*, Springer, 1983, págs. 183-238.
- [49] D. G. Luenberger, Y. Ye y col., *Linear and nonlinear programming*. Springer, 1984, vol. 2.

- [50] T. L. Magnanti, P. Mireault y R. T. Wong, «Tailoring Benders decomposition for uncapacitated network design,» en *Netflow at Pisa*, G. Gallo y C. Sandi, eds., Springer, 1986, págs. 112-154.
- [51] T. L. Magnanti y R. T. Wong, «Accelerating Benders decomposition: Algorithmic enhancement and model selection criteria,» *Operations Research*, vol. 29, n.º 3, págs. 464-484, 1981.
- [52] D. L. Martell, «A review of recent forest and wildland fire management decision support systems research,» *Current Forestry Reports*, vol. 1, n.º 2, págs. 128-137, 2015.
- [53] T. Matsui e Y. Matsui, «A survey of algorithms for calculating power indices of weighted majority games,» *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol. 43, n.º 1, págs. 71-86, 2000.
- [54] J. F. McCloskey, «OR Forum—the beginnings of operations research: 1934–1941,» *Operations Research*, vol. 35, n.º 1, págs. 143-152, 1987.
- [55] C. Miller y A. A. Ager, «A review of recent advances in risk analysis for wildfire management,» *International Journal of Wildland Fire*, vol. 22, n.º 1, págs. 1-14, 2013.
- [56] A. F. Neto, «Generating functions of weighted voting games, MacMahon’s partition analysis, and Clifford algebras,» *Mathematics of Operations Research*, vol. 44, n.º 1, págs. 74-101, 2019.
- [57] A. F. Neto y C. R. Fonseca, «An approach via generating functions to compute power indices of multiple weighted voting games with incompatible players,» *Annals of Operations Research*, vol. 279, n.º 1, págs. 221-249, 2019.
- [58] J. v. Neumann, «Zur theorie der gesellschaftsspiele,» *Mathematische Annalen*, vol. 100, n.º 1, págs. 295-320, 1928.

- [59] W. Ongsakul y N. Petcharaks, «Unit commitment by enhanced adaptive Lagrangian relaxation,» *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 19, n.º 1, págs. 620-628, 2004.
- [60] G. Owen, «Modification of the Banzhaf-Coleman index for games with a priori unions,» en *Power, voting, and voting power*, M. J. Holler, ed., Springer, 1981, págs. 232-238.
- [61] G. Owen, «Multilinear extensions and the Banzhaf value,» *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 22, n.º 4, págs. 741-750, 1975.
- [62] G. Owen, «Multilinear extensions of games,» *Management Science*, vol. 18, n.º 5-part-2, págs. 64-79, 1972.
- [63] G. Owen, «Values of games with a priori unions,» en *Mathematical Economics and Game Theory*, O. M. R. Henn, ed., Springer, 1977, págs. 76-88.
- [64] Python Software Foundation, *Python Language Reference*, Available at <http://www.python.org>, 2020.
- [65] R Core Team, *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, Available at <https://www.R-project.org/>, 2020.
- [66] J. Rajgopal, «Principles and applications of operations research,» en *Maynard's Industrial Engineering Handbook*, K. B. Zandin, ed., McGraw-Hill Education, 2004, págs. 11-27.
- [67] K. Ríbnikov y K. Medkov, *Análisis combinatorio: problemas y ejercicios*. Mir, 1988.
- [68] J. Rodríguez Veiga, M. J. Ginzo Villamayor y B. V. Casas Méndez, «Wildfire resources management: a decision support tool created with R to solve optimization models in logistics for fighting forest fires,» en *Progress in Industrial Mathematics: Success Stories*, M. Cruz, C. Parés y P. Quintela, eds., vol. 5, Springer International Publishing, 2021, págs. 227-246.
- [69] J. Rodríguez-Veiga, *ROMO*, Available at <https://github.com/jorgerodriguezveiga/romo>, 2020.

- [70] J. Rodríguez-Veiga, M. J. Ginzo-Villamayor y B. Casas-Méndez, «An integer linear programming model to select and temporally allocate resources for fighting forest fires,» *Forests*, vol. 9, n.º 10, 583, págs. 1-18, 2018.
- [71] J. Rodríguez-Veiga, I. Gómez-Costa, M. J. Ginzo-Villamayor, B. Casas-Méndez y J. L. Sáiz-Díaz, «Assignment problems in wildfire suppression: Models for optimization of aerial resource logistics,» *Forest Science*, vol. 64, n.º 5, págs. 504-514, 2018.
- [72] J. Rodríguez-Veiga, G. I. Novoa-Flores y B. Casas-Méndez, «Implementing generating functions to obtain power indices with coalition configuration,» *Discrete Applied Mathematics*, vol. 214, págs. 1-15, 2016.
- [73] J. Rodríguez-Veiga, D. Rodríguez-Penas, Á. M. González-Rueda y M. J. Ginzo-Villamayor, «Application of decomposition techniques in a wildfire suppression optimization model,» *inf. téc.*, 2021.
- [74] G. K. Saharidis, M. Minoux y M. G. Ierapetrítou, «Accelerating Benders method using covering cut bundle generation,» *International Transactions in Operational Research*, vol. 17, n.º 2, págs. 221-237, 2010.
- [75] S. Sethi y G. Sorger, «A theory of rolling horizon decision making,» *Annals of Operations Research*, vol. 29, n.º 1, págs. 387-415, 1991.
- [76] L. S. Shapley, «A value for n-person games,» en *Contributions to the Theory of Games*, A. W. Tucker y H. Kuhn, eds., vol. 2, Princeton University Press, 1953, págs. 307-317.
- [77] L. S. Shapley y M. Shubik, «A method for evaluating the distribution of power in a committee system,» *American Political Science Review*, vol. 48, n.º 3, págs. 787-792, 1954.

- [78] C. Sievert, C. Parmer, T. Hocking, S. Chamberlain, K. Ram, M. Corvellec y P. Despouy, *plotly: Create Interactive Web Graphics via 'plotly.js'*, R package version 4.7.1, 2017. dirección: <https://CRAN.R-project.org/package=plotly>.
- [79] Spanish Ministry of Development, *Operational Circular 16-B*, http://www.aecaweb.com/informes/documentos/INFORMES_Y_ESTUDIOS/circular_operativa_16_b.doc. Accessed: 14 de junio de 2021, 1995.
- [80] W. N. Sparhawk, *The use of liability ratings in planning forest fire protection*. National Emergency Training Center, United States of America, 1925.
- [81] F. Vanderbeck y L. A. Wolsey, «An exact algorithm for IP column generation,» *Operations Research Letters*, vol. 19, n.º 4, págs. 151-159, 1996.
- [82] F. Vanderbeck, «On Dantzig-Wolfe decomposition in integer programming and ways to perform branching in a branch-and-price algorithm,» *Operations Research*, vol. 48, n.º 1, págs. 111-128, 2000.
- [83] J. Von Neumann y O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press, 1944.
- [84] E. Winter, «The consistency and potential for values of games with coalition structure,» *Games and Economic Behavior*, vol. 4, n.º 1, págs. 132-144, 1992.
- [85] X. Zhao, P. B. Luh y J. Wang, «Surrogate gradient algorithm for Lagrangian relaxation,» *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 100, n.º 3, págs. 699-712, 1999.



Apéndice A

Técnicas de descomposición

En el presente capítulo se describen las ideas principales de las técnicas de descomposición empleadas en el trabajo [73], presentado en la Sección 5.3.

Las técnicas de descomposición parten de dividir el problema original en problemas de menor dimensión, con el fin de que la resolución del problema de partida sea más sencilla. Se puede decir que este tipo de técnicas siguen la filosofía de “divide y vencerás” y para realizar las descomposiciones, se apoyan en una estructura concreta de los problemas.

Los problemas con los que se va a trabajar se caracterizan por tener dos estructuras bien diferenciadas. La primera posee un subconjunto de restricciones, llamadas restricciones complicantes, que en caso de ser omitidas permiten su descomposición en problemas de menor complejidad. La segunda se caracteriza por tener un subconjunto de variables, llamadas variables complicantes, que al ser fijadas a un valor facilitan la resolución del problema resultante. Por ejemplo, son complicantes las variables enteras en un problema MILP, variables que provocan no linealidades en restricciones y que en caso de ser fijadas a un valor proporcionan un problema lineal, o variables que permiten identificar algún tipo de estructura en el problema que permita separarlo en subproblemas más sencillos.

Para la explicación de los distintos algoritmos de descomposición será

necesario el empleo de algunos resultados clásicos de la programación lineal.

Teorema A.1 (Carathéodory). *Sea $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \mathbf{x} \leq b, \mathbf{x} \geq 0\}$ un conjunto (poliedro convexo) no vacío, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Entonces el conjunto de sus puntos extremos es no vacío y finito, $\{x_1, \dots, x_p\} = \{x_i \in \mathbb{R}^n : i \in \mathcal{A}\}$. Además, su conjunto de direcciones extremas es vacío si y solo si X es acotado. Si X es no acotado, entonces el conjunto de direcciones extremas, $\{d_1, \dots, d_l\} = \{d_j \in \mathbb{R}^n : j \in \mathcal{D}\}$, es no vacío y finito. Asimismo, $\bar{x} \in X$ si y solo si puede ser representado como combinación convexa de sus puntos extremos más una combinación lineal no negativa de sus direcciones extremas,*

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \sum_{i \in \mathcal{A}} \lambda_i \cdot x_i + \sum_{j \in \mathcal{D}} \mu_j \cdot d_j \\ \sum_{i \in \mathcal{A}} \lambda_i &= 1 \\ \lambda_i &\geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{A} \\ \mu_j &\geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Teorema A.2 (Fundamental de la Programación Lineal). *Si un problema de programación lineal tiene una solución óptima acotada, entonces existe un punto extremo de su región factible que es óptimo.*

Teorema A.3 (Dualidad Débil). *Dado un problema de programación lineal (problema primal) y su problema dual, y un par de soluciones factibles, una de cada problema, el valor del objetivo del problema de minimización es mayor o igual que el valor del objetivo del problema de maximización, cuando se evalúan en las soluciones consideradas.*

Teorema A.4 (Dualidad Fuerte). *Dado un problema de programación lineal (problema primal) y su problema dual, si uno tiene solución óptima finita, entonces, el otro también la tiene, y los valores óptimos de sus funciones objetivo coinciden.*

Teniendo en cuenta el Teorema de Dualidad Débil A.3, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario A.5. *Dado un problema de programación lineal (problema primal) y su problema dual, si la función objetivo de uno de ellos es no acotada, entonces el otro no tiene soluciones factibles.*

Los siguientes apartados de este apéndice describen tres técnicas de descomposición empleadas para la resolución de problemas con restricciones complicantes o variables complicantes. En las secciones A.1 y A.2 se describen la técnica de descomposición lagrangiana y la técnica de descomposición de Dantzig-Wolfe, respectivamente. Ambas se emplean sobre problemas con restricciones complicantes, permitiendo manejarlas para obtener una descomposición que simplifique la resolución del problema original. En la Sección A.3 se describe la técnica de descomposición de Benders, empleada para facilitar la resolución de problemas con una estructura con variables complicantes. En estas secciones se describirán, sin profundizar, los algoritmos que permiten aplicar cada una de las técnicas de descomposición. En caso de querer ahondar en los fundamentos teóricos, se facilitarán referencias útiles para cada una de las técnicas.

A.1. Descomposición lagrangiana

Consideremos el siguiente problema de programación lineal con restricciones complicantes.

$$\min_{\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}} \quad c_1^\top \cdot \mathbf{x}_1 + c_2^\top \cdot \mathbf{x}_2 \quad (\text{A.1})$$

s.a:

$$A_1 \cdot \mathbf{x}_1 \leq a_1 \quad (\text{A.2})$$

$$A_2 \cdot \mathbf{x}_2 \leq a_2 \quad (\text{A.3})$$

$$B_1 \cdot \mathbf{x}_1 + B_2 \cdot \mathbf{x}_2 \leq b \quad (\text{A.4})$$

donde para cada subconjunto de variables \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 , $c_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ y $c_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ son sus vectores de coeficientes en la función objetivo y $A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$ y $A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$ sus matrices de coeficientes en las restricciones en las que únicamente están presentes variables de uno de los dos grupos. Además, se representa por $a_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ y $a_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ a los vectores de términos independientes de las restricciones (A.2) y (A.3), respectivamente. Las restricciones (A.4) forman el subconjunto de restricciones complicantes, siendo $B_1 \in \mathbb{R}^{m_B \times n_1}$ y $B_2 \in \mathbb{R}^{m_B \times n_2}$ sus matrices de coeficientes para las variables \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 , respectivamente, y $b \in \mathbb{R}^{m_B}$ su vector de términos independientes.

La descomposición lagrangiana [25], también conocida como descomposición de la condición de optimalidad, se basa en la relajación lagrangiana [47]. Esta permite pasar de un problema de optimización con restricciones a uno irrestricto por medio de los multiplicadores de Lagrange, que penalizan el incumplimiento de las mismas.

El procedimiento de relajar restricciones se puede aplicar sobre las restricciones complicantes del problema planteado, obteniendo la siguiente función lagrangiana,

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\lambda}) = c_1^\top \cdot \mathbf{x}_1 + c_2^\top \cdot \mathbf{x}_2 + \boldsymbol{\lambda}^\top \cdot (B_1 \cdot \mathbf{x}_1 + B_2 \cdot \mathbf{x}_2 - b),$$

donde $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{m_B}$ es el vector de multiplicadores de Lagrange asociado a las restricciones complicantes (A.4).

Haciendo uso de la función lagrangiana se define la función dual como,

$$\psi(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}} \{ \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \boldsymbol{\lambda}) : A_1 \cdot \mathbf{x}_1 \leq a_1, A_2 \cdot \mathbf{x}_2 \leq a_2 \}.$$

Asimismo, a partir de la función dual, se obtiene el problema dual tal y como se formula a continuación,

$$\begin{aligned} & \max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{m_B}} \psi(\boldsymbol{\lambda}) \\ & \text{s.a.:} \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq 0. \end{aligned}$$

En la práctica, el algoritmo de descomposición de Lagrange suele obtener buenos resultados de convergencia cuando la función dual es fácilmente evaluable para unos valores dados $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ de los multiplicadores de Lagrange. O dicho de otra forma, si para un valor $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ dado, es sencilla la resolución del problema primal relajado definido a continuación,

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}} \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \bar{\boldsymbol{\lambda}}) \\ & \text{s.a.:} \\ & A_1 \cdot \mathbf{x}_1 \leq a_1 \\ & A_2 \cdot \mathbf{x}_2 \leq a_2. \end{aligned} \tag{A.5}$$

El problema (A.5) se puede descomponer en dos subproblemas. Tomando el problema asociado con las variables \mathbf{x}_j , con $j \in \{1, 2\} := \mathcal{M}$, su subproblema lagrangiano (subproblema j) se obtiene fijando el valor de las variables \mathbf{x}_k a \bar{x}_k , con $k \in \mathcal{M} \setminus \{j\}$. Además, se le asigna un subconjunto, m_{B_j} , de las m_B restricciones complicantes de partida. Aunque existen distintas formas de asociar las restricciones complicantes a los subproblemas, una de las más empleadas consiste en asignar cada restricción complicante al subproblema cuyo grupo de variables asociado posee un mayor número de variables con coeficiente no nulo en esa restricción. Se verifica que $\sum_{i \in \mathcal{M}} m_{B_i} = m_B$. Por tanto, el subproblema j se define como,

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^{n_j}} \quad & c_j^\top \cdot \mathbf{x}_j + \sum_{k \in \mathcal{M} \setminus \{j\}} c_k^\top \cdot \bar{x}_k \\ & + \bar{\lambda}^{[j]\top} \left(B_j^{[j]} \cdot \mathbf{x}_j + \sum_{k \in \mathcal{M} \setminus \{j\}} B_k^{[j]} \cdot \bar{x}_k - b^{[j]} \right) \\ \text{s.a:} \quad & A_j \cdot \mathbf{x}_j \leq a_j, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

donde para el subconjunto de restricciones asociadas al subproblema j , $\bar{\lambda}^{[j]} \in \mathbb{R}^{m_{B_j}}$ es su vector de multiplicadores de Lagrange, $B_i^{[j]} \in \mathbb{R}^{m_{B_j} \times n_i}$ su matriz de coeficientes asociadas a las variables \mathbf{x}_i , para todo $i \in \mathcal{M}$, y $b^{[j]} \in \mathbb{R}^{m_{B_j}}$ su vector de términos independientes.

Explicamos a continuación el algoritmo de descomposición lagrangiana en líneas generales. El algoritmo tiene en cuenta los teoremas de dualidad débil y dualidad fuerte (A.3 y A.4) enunciados anteriormente y parte de una solución inicial del problema y de un valor de los multiplicadores de Lagrange. A continuación se resuelven los dos subproblemas, lo que permite actualizar los valores de las variables y posteriormente el valor de los multiplicadores. Se repiten los mismos pasos hasta que los valores de las variables en una iteración y la siguiente son suficientemente próximos. Cabe mencionar que para la actualización de los multiplicadores se hace uso de métodos como el del subgradiente, los cuales proporcionan direcciones de mejora. Una explicación detallada se puede encontrar en [26], [59] o [85]. El pseudocódigo de la descomposición lagrangiana se describe en el Algoritmo 1.

Algoritmo 1 Descomposición lagrangiana

Input: Inicializar $\bar{x}_j, \bar{\lambda}^{[j]}$ para todo $j \in \mathcal{M}$.

- 1: **while** los valores de las variables en dos iteraciones distintas no sean suficientemente próximos **do**
 - 2: **for** $j \in \mathcal{M}$ **do**
 - 3: Resolver el subproblema j (A.6).
 - 4: Actualizar los valores de \bar{x}_j a partir de la solución obtenida de la resolución del subproblemas j , para todo $j \in \mathcal{M}$.
 - 5: Actualizar los valores de $\bar{\lambda}^{[j]}$ a partir de una dirección de mejora, para todo $j \in \mathcal{M}$.
 - 6: Devolver la solución $x = (x_j)_{j \in \mathcal{M}}$.
-

Indicar que habitualmente en vez de utilizar la descomposición lagrangiana, se emplea la descomposición lagrangiana aumentada [25]. Esta técnica de descomposición añade un término cuadrático de regularización en la función objetivo de los subproblemas, que mejora la resolución del problema en términos de convergencia local del algoritmo.

A.2. Descomposición de Dantzig–Wolfe

Consideremos el siguiente problema de programación lineal con restricciones complicantes.

$$\begin{aligned}
 & \underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n}{\text{mín}} && c^\top \cdot \mathbf{x} \\
 & \text{s.a:} && \\
 & && E \cdot \mathbf{x} = e \\
 & && B \cdot \mathbf{x} = b \\
 & && \mathbf{x} \geq 0,
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

donde $c \in \mathbb{R}^n$, $E \in \mathbb{R}^{m_e \times n}$, $e \in \mathbb{R}^{m_e}$, $B \in \mathbb{R}^{m_b \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^{m_b}$. Las restricciones $E \cdot \mathbf{x} = e$ son consideradas el conjunto de restricciones complicantes y el conjunto de restricciones $B \cdot \mathbf{x} = b$ es susceptible de ser descompuesto por bloques.

La descomposición de Dantzig-Wolfe [28] fue diseñada para resolver problemas de programación lineal de gran tamaño con una estructura de bloques y un conjunto de restricciones complicantes. El procedimiento hará uso de un problema maestro y de al menos un subproblema. Para la motivación del algoritmo de Dantzig-Wolfe, consideremos el problema (A.7) en el cual existe un único bloque de restricciones $B \cdot \mathbf{x} = b$.

El algoritmo de Dantzig-Wolfe se apoya en el Teorema de Carathéodory. Sea el poliedro convexo $X = \{B \cdot \mathbf{x} = b, \mathbf{x} \geq 0\}$ con conjunto de puntos extremos $\{x_i \in \mathbb{R}^n : i \in \mathcal{A}\}$ y conjunto de direcciones extremas $\{d_j \in \mathbb{R}^n : j \in \mathcal{D}\}$. Por el Teorema de Carathéodory A.1, el problema (A.7) se puede reformular a partir de los puntos extremos y direcciones extremas de X como,

$$\begin{aligned}
 Z &= \min_{\lambda \in \mathbb{R}^{|\mathcal{A}|}, \mu \in \mathbb{R}^{|\mathcal{D}|}} \sum_{i \in \mathcal{A}} \lambda_i \cdot c^\top \cdot x_i + \sum_{j \in \mathcal{D}} \mu_j \cdot c^\top \cdot d_j \\
 \text{s.a:} & \sum_{i \in \mathcal{A}} \lambda_i \cdot E \cdot x_i + \sum_{j \in \mathcal{D}} \mu_j \cdot E \cdot d_j = e \\
 & \sum_{i \in \mathcal{A}} \lambda_i = 1 \\
 & \lambda_i \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{A} \\
 & \mu_j \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{D}.
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

donde λ son los pesos de la combinación convexa de los puntos extremos, y μ los pesos de la combinación lineal no negativa de las direcciones extremas.

Esta reformulación no hace la resolución del problema original más sencilla. El número de restricciones del nuevo problema es inferior al del problema original, pero el número de variables ha aumentado considerablemente al necesitar una por cada punto y dirección extrema del conjunto X .

El algoritmo de Dantzig-Wolfe propone relajar el problema (A.8) evitando considerar el conjunto total de puntos extremos y direcciones extremas. Partiendo de un subconjunto de los mismos, el algoritmo irá añadiendo nuevos puntos extremos y direcciones extremas a medida que vayan siendo necesarios. Por tanto, una de las claves para un buen rendi-

miento del algoritmo de Dantzig-Wolfe es que únicamente sea necesario añadir una cantidad relativamente pequeña de puntos extremos y direcciones extremas antes de encontrar el óptimo. Este comportamiento es similar al del método símplex, que habitualmente solo recorre una pequeña cantidad de puntos extremos de la región factible.

Supongamos que disponemos de unos subconjuntos de puntos extremos y direcciones extremas, con sus conjuntos de índices correspondientes $\mathcal{A}_R \subset \mathcal{A}$ y $\mathcal{D}_R \subset \mathcal{D}$, respectivamente. Entonces el problema maestro del algoritmo de Dantzig-Wolfe se define como,

$$\begin{aligned}
 Z &= \min_{\lambda \in \mathbb{R}^{|\mathcal{A}_R|}, \mu \in \mathbb{R}^{|\mathcal{D}_R|}} \sum_{i \in \mathcal{A}_R} \lambda_i \cdot c^\top \cdot x_i + \sum_{j \in \mathcal{D}_R} \mu_j \cdot c^\top \cdot d_j \\
 \text{s.a:} \\
 (\omega) \quad & \sum_{i \in \mathcal{A}_R} \lambda_i \cdot E \cdot x_i + \sum_{j \in \mathcal{D}_R} \mu_j \cdot E \cdot d_j = e \\
 (\alpha) \quad & \sum_{i \in \mathcal{A}_R} \lambda_i = 1 \\
 & \lambda_i \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{A}_R \\
 & \mu_j \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{D}_R.
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

donde $\omega \in \mathbb{R}^{m_e}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ son las variables duales asociadas a las distintas restricciones. Cualquier solución factible del problema (A.9) se corresponde con una solución factible del problema original, quedando esta determinada por la ecuación, $\mathbf{x} = \sum_{i \in \mathcal{A}_R} \lambda_i \cdot x_i + \sum_{j \in \mathcal{D}_R} \mu_j \cdot d_j$.

La complejidad del algoritmo radica en determinar si una solución factible del problema (A.9) es o no óptima en el problema original. Además, en caso de que no sea así, es necesario identificar algún punto extremo nuevo o una dirección extrema nueva que, una vez incluida en el problema maestro (A.9), mejore su función objetivo.

Para obtener un nuevo punto extremo o dirección extrema se define el subproblema de Dantzig-Wolfe. Su definición se basa, de forma similar a lo que ocurre en el método símplex, en la obtención de un nuevo punto extremo que tenga un mayor coste reducido no negativo. Además, su cálculo se realizará teniendo en cuenta que los costes reducidos del primal pueden ser obtenidos con la ayuda de la solución asociada del dual.

Supongamos que tenemos una solución básica factible del proble-

ma (A.9). Esta solución se corresponde también con una solución básica factible del problema (A.8) y también con una solución (ω, α) de su dual. Dado un punto extremo x_i , su variable asociada en el problema (A.8) es λ_i , con coste asociado $c^\top \cdot x_i$. Su columna asociada en la matriz de restricciones es $\begin{pmatrix} E \cdot x_i \\ 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, el coste reducido asociado al punto extremo x_i se puede calcular a partir de la solución asociada del dual como

$$(\omega, \alpha)^\top \cdot \begin{pmatrix} E \cdot x_i \\ 1 \end{pmatrix} - c^\top \cdot x_i = \omega^\top \cdot E \cdot x_i + \alpha - c^\top \cdot x_i.$$

Si todos los costes reducidos son negativos quiere decir que la solución factible es óptima. En otro caso interesa considerar una solución que mejore la función objetivo, tomando aquella que tenga un coste reducido mayor. Para calcular la nueva solución se resuelve el siguiente subproblema de optimización:

$$\begin{aligned} Z_S &= \min_{x \in \mathbb{R}^n} && c^\top \cdot x - \omega^\top \cdot E \cdot x \\ &\text{s.a:} && B \cdot x = b \\ &&& x \geq 0. \end{aligned} \tag{A.10}$$

En la formulación del problema se multiplica la función objetivo por -1 para pasar de un problema de maximizar a uno de minimizar. Además, se elimina de la función objetivo $-\alpha$ por ser un término constante.

La región factible de este problema es X , con lo que si el subproblema (A.10) tiene un óptimo finito, dicho óptimo se alcanza en un punto extremo de X , con función objetivo Z_S . Si $Z_S \geq \alpha$ sabremos que no hay ningún punto extremo de X con coste reducido positivo y por tanto la solución actual es óptima. Además, la solución actual del problema (A.9) es la solución óptima del problema (A.8), pudiendo por tanto calcular la solución óptima del problema (A.7) como $x = \sum_{i \in \mathcal{A}_R} \lambda_i \cdot x_i + \sum_{j \in \mathcal{D}_R} \mu_j \cdot d_j$, tal y como se indicó previamente.

El cálculo de las direcciones extremas se realiza empleando igualmente el subproblema (A.10) realizando un procedimiento análogo para llegar a él. En la resolución del subproblema pueden producirse las siguientes

situaciones:

1. No tiene solución factible, entonces el problema original tampoco.
2. Tiene óptimo finito, entonces estamos ante un punto extremo de la región factible X .
3. No tiene óptimo finito, entonces obtendremos una dirección extrema d_j de la región factible X resolviendo el siguiente subproblema cónico,

$$\begin{aligned} & \min_{d \in \mathbb{R}^n} c^\top \cdot d - \omega^\top \cdot E \cdot d \\ & \text{s.a:} \\ & B \cdot d = 0 \\ & \vec{1}^\top \cdot d \leq 1 \\ & d \geq 0, \end{aligned} \tag{A.11}$$

donde $\vec{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

Para establecer el criterio de parada del algoritmo, cabe destacar que el objetivo en una solución del problema maestro (A.9) es una cota superior del óptimo del problema original (A.7). Para determinar una cota inferior, dada una solución factible del problema original, \bar{x} , también factible en el subproblema (A.10), se verifica la siguiente desigualdad:

$$c^\top \cdot \bar{x} - \omega^\top \cdot E\bar{x} \geq Z_S,$$

lo que implica que,

$$c^\top \cdot \bar{x} \geq Z_S + \omega^\top \cdot E\bar{x} = Z_S + \omega^\top \cdot e,$$

donde la igualdad anterior se tiene por ser \bar{x} una solución factible del problema original y por tanto verificar que $E \cdot \bar{x} = e$. Al ser

$$c^\top \cdot \bar{x} \geq Z_S + \omega^\top \cdot e$$

para cualquier solución factible del problema original, $Z_S + \omega^\top \cdot e$ será una cota inferior del objetivo óptimo.

Una vez presentados el problema maestro y el subproblema así como las relaciones entre ellos, pasamos a describir el algoritmo de descomposición de Dantzig-Wolfe. El algoritmo comienza mediante la inicialización del conjunto de puntos y direcciones extremas así como de las cotas inferior y superior para el valor del objetivo. A continuación se resuelve

el problema maestro (A.9). Se obtienen su solución primal (λ, μ) y su solución dual (ω, α) . Se actualiza la cota superior con el valor de la función objetivo. Posteriormente, se considera el subproblema (A.10) y se obtiene un punto extremo (x_p) o una dirección extrema (d_l) de X . En el primer caso se actualiza la cota inferior si $Z_S + w^\top \cdot e$ es mayor que la cota inferior actual. Si las cotas inferior y superior coinciden el algoritmo finaliza. En otro caso, se incorpora al problema maestro el punto o dirección extrema obtenida y se repiten nuevamente los pasos descritos. El Algoritmo 2 muestra el pseudocódigo de la descomposición de Dantzig-Wolfe. Una explicación más detallada del algoritmo se puede ver en [13] y [49], en el manual orientado a la aplicación [17], y en el libro [27], entre otros.

Es importante destacar que el algoritmo requiere partir de un subconjunto de puntos extremos y direcciones extremas (este último podría ser vacío). Para inicializar los subconjuntos existen diversos métodos. Una de ellos consiste en realizar perturbaciones de la función objetivo de los subproblemas (A.10) buscando obtener distintos puntos extremos de su región factible. Otra opción es la resolución del algoritmo de Dantzig-Wolfe pero sobre una reformulación del problema maestro (A.9) y del subproblema (A.10). El problema maestro se reformula incorporando variables auxiliares en las restricciones y omitiendo la función objetivo original y minimizando en esta una penalización por el empleo de las variables auxiliares. El subproblema se reformula omitiendo en este el término $c^\top \cdot x$. La descripción detallada de este algoritmo se puede ver en [13].

Además el algoritmo se puede extender para descomponer el subproblema (A.10) en varios subproblemas, siempre y cuando la estructura lo permita. El algoritmo se basa en el procedimiento expuesto, pero en este caso habrá que aplicar el Teorema de Carathéodory A.1 sobre la región factible de cada subproblema. Detalles de la extensión del algoritmo se pueden ver en [13].

Por último, se menciona que, para problemas MILP, la técnica se conoce como branch-and-price [12], [82], y aún a las metodologías de Dantzig-Wolfe y branch-and-bound [46].

Algoritmo 2 Descomposición de Dantzig-Wolfe

Input: Inicializar $LB \leftarrow -\infty$, $UB \leftarrow \infty$ y los subconjuntos de puntos extremos y direcciones extremas \mathcal{A}_R y \mathcal{D}_R , respectivamente.

- 1: **while** $LB < UB$ **do**
 - 2: Resolver el problema maestro (A.9).
 - 3: Obtener el valor de su función objetivo, Z , las variables primales (λ, μ) y las variables duales (ω, α) .
 - 4: Actualizar $UB \leftarrow Z$.
 - 5: Resolver el subproblema (A.10).
 - 6: Obtener el valor de su función objetivo Z_S .
 - 7: **if** $Z_S > -\infty$ **then**
 - 8: Obtener la variable primal x .
 - 9: Añadir el punto extremo $x_p \leftarrow x$ (con $p = |\mathcal{A}_R| + 1$) al conjunto de puntos extremos $\mathcal{A}_R \leftarrow \mathcal{A}_R \cup \{p\}$.
 - 10: Actualizar $LB \leftarrow \max\{LB, Z_S + \omega^\top \cdot e\}$.
 - 11: **else**
 - 12: Resolver el problema (A.11).
 - 13: Obtener la variable primal d .
 - 14: Añadir la dirección extrema $d_l \leftarrow d$ (con $l = |\mathcal{D}_R| + 1$) al conjunto de direcciones extremas $\mathcal{D}_R \leftarrow \mathcal{D}_R \cup \{l\}$.
 - 15: Devolver la solución del problema original $x = \sum_{i \in \mathcal{A}_R} \lambda_i \cdot x_i + \sum_{j \in \mathcal{D}_R} \mu_j \cdot d_j$.
-

A.3. Descomposición de Benders

Consideremos el siguiente problema de programación lineal con variables complicantes,

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_1}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_2}} && c^\top \cdot \mathbf{x} \quad + \quad d^\top \cdot \mathbf{y} \\
 & \text{s.a.:} && \\
 & && A \cdot \mathbf{x} \quad + \quad D \cdot \mathbf{y} \geq a \\
 & && B \cdot \mathbf{y} \geq b \\
 & && \mathbf{x} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Se considera que \mathbf{y} es el vector de variables complicantes. Los vectores $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n_1}$ y $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_2}$ son los coeficientes de las variables \mathbf{x} e \mathbf{y} en la función objetivo. Además las restricciones se dividen en dos conjuntos. En el primer conjunto de restricciones, $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$ y $D \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$ son las matrices de coeficientes de las variables \mathbf{x} e \mathbf{y} , respectivamente, y $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{m_1}$ es el vector de términos independientes. El segundo conjunto de restricciones únicamente está definido a partir de las variables complicantes \mathbf{y} , siendo $B \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$ su matriz de coeficientes y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m_2}$ su vector de términos independientes.

El algoritmo de Benders [14] surge a principios de los años sesenta para la resolución de problemas con variables complicantes. Inicialmente, este algoritmo se crea para la resolución de problemas MILP, proponiendo la descomposición del problema teniendo en cuenta la naturaleza de sus variables. Con esta idea surgen las definiciones del problema maestro, construido con las variables enteras (complicantes), y del subproblema, construido con las variables continuas. De forma más general, las ideas del método de descomposición fueron rápidamente extendidas para otros tipos de problemas con variables complicantes. Esta flexibilidad del algoritmo de Benders es la principal razón de que haya sido aplicado exitosamente en multitud de problemas reales en distintos campos.

Benders propuso un algoritmo iterativo que, como se ha dicho, se apoya en la resolución de dos problemas, el maestro y el subproblema. Estos no se resuelven de forma independiente. El problema maestro se comunica con el subproblema proponiéndole un valor de las variables complicantes mientras que el subproblema se comunica con el maestro a través de su solución dual, tal y como explicaremos más adelante tras una serie de preliminares necesarios.

Para un valor fijo $\bar{\mathbf{y}}$ de \mathbf{y} se define el subproblema como,

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_1}} \quad & \mathbf{c}^\top \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d}^\top \cdot \bar{\mathbf{y}} \\ \text{s.a:} \quad & A \cdot \mathbf{x} \geq (\mathbf{a} - D \cdot \bar{\mathbf{y}}) \\ & \mathbf{x} \geq 0, \end{aligned} \tag{A.13}$$

y su dual viene dado por,

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m_1}} (a - D \cdot \bar{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{u} + d^\top \cdot \bar{\mathbf{y}} \\ \text{s.a:} & \\ & A^\top \cdot \mathbf{u} \leq c \\ & \mathbf{u} \geq 0. \end{aligned} \tag{A.14}$$

Si definimos $Y = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_2} : B \cdot \mathbf{y} \geq b\}$, entonces el problema original (A.12) se puede escribir empleando la formulación del subproblema (A.13) como

$$\min_{\mathbf{y} \in Y} \left\{ \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_1}} \{c^\top \cdot \mathbf{x} + d^\top \cdot \mathbf{y} : A \cdot \mathbf{x} + D \cdot \mathbf{y} \geq a, \mathbf{x} \geq 0\} \right\}.$$

Equivalentemente, por el Teorema de Dualidad Fuerte A.4 la definición se puede realizar a través de la formulación del subproblema dual (A.14),

$$\min_{\mathbf{y} \in Y} \left\{ \max_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m_1}} \{(a - D \cdot \mathbf{y})^\top \cdot \mathbf{u} + d^\top \cdot \mathbf{y} : A^\top \cdot \mathbf{u} \leq c, \mathbf{u} \geq 0\} \right\}. \tag{A.15}$$

Consideremos ahora que el conjunto de puntos extremos de la región factible del subproblema dual es $\{u_1, \dots, u_p\} = \{u_i \in \mathbb{R}^{m_1} : i \in \mathcal{A}\}$ y que el conjunto de sus direcciones extremas es $\{v_1, \dots, v_l\} = \{v_j \in \mathbb{R}^{m_1} : j \in \mathcal{D}\}$. Entonces, por el Teorema de Carathéodory A.1, se puede reformular el subproblema dual como,

$$\begin{aligned} & \max_{\lambda \in |\mathcal{A}|, \mu \in |\mathcal{D}|} \sum_{i \in \mathcal{A}} (a - D \cdot \bar{\mathbf{y}})^\top \cdot u_i \cdot \lambda_i + \sum_{j \in \mathcal{D}} (a - D \cdot \bar{\mathbf{y}})^\top \cdot v_j \cdot \mu_j + d^\top \cdot \bar{\mathbf{y}} \\ \text{s.a:} & \\ & \sum_{i \in \mathcal{A}} \lambda_i = 1 \\ & \lambda_i \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{A} \\ & \mu_j \geq 0, \quad \forall j \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

El Corolario A.5 establece que para que el subproblema primal no sea infactible se ha de exigir que el subproblema dual sea acotado, i.e., $(a - D \cdot \bar{\mathbf{y}})^\top \cdot v_j \leq 0$ para todo $j \in \mathcal{D}$. Además, por el Teorema Fundamental de la Programación Lineal A.2, se sabe que existe un punto extremo de la región factible del subproblema dual que es óptimo. Por lo tanto, se

podrá reescribir como,

$$\begin{aligned} \max_{i \in \mathcal{A}} \quad & (a - D \cdot \bar{y})^\top \cdot u_i + d^\top \cdot \bar{y} \\ & (a - D \cdot \bar{y})^\top \cdot v_j \leq 0, \quad \forall j \in \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

En consecuencia, podremos escribir el problema (A.15) como,

$$\min_{\mathbf{y} \in Y} \left\{ \max_{i \in \mathcal{A}} \{ (a - D \cdot \mathbf{y})^\top \cdot u_i + d^\top \cdot \mathbf{y} : (a - D \cdot \mathbf{y})^\top \cdot v_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{D} \} \right\},$$

o equivalentemente, empleando una variable auxiliar para modelar el máximo como,

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y} \in Y, \alpha \in \mathbb{R}} \quad & \alpha \\ \text{s.a:} \quad & \alpha \geq d^\top \cdot \mathbf{y} + (a - D \cdot \mathbf{y})^\top \cdot u_i, \quad \forall i \in \mathcal{A} \\ & (a - D \cdot \mathbf{y})^\top \cdot v_j \leq 0, \quad \forall j \in \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Al igual que el algoritmo de Dantzig-Wolfe, el algoritmo de Benders, propone relajar el problema (A.17) evitando considerar el conjunto total de puntos extremos y direcciones extremas de la región factible del subproblema dual. Partiendo de un subconjunto de los mismos, el algoritmo irá añadiendo nuevos puntos extremos o direcciones extremas. Sea por tanto $\mathcal{A}_R \subset \mathcal{A}$ un subconjunto de puntos extremos y $\mathcal{D}_R \subset \mathcal{D}$ un subconjunto de direcciones extremas. Entonces el problema maestro del algoritmo de Benders se define como,

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_2}, \alpha \in \mathbb{R}} \quad & \alpha \\ \text{s.a:} \quad & \alpha \geq d^\top \cdot \mathbf{y} + (a - D \cdot \mathbf{y})^\top \cdot u_i, \quad \forall i \in \mathcal{A}_R \\ & (a - D \cdot \mathbf{y})^\top \cdot v_j \leq 0, \quad \forall j \in \mathcal{D}_R \\ & B \cdot \mathbf{y} \geq b. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Las restricciones $\alpha \geq d^\top \cdot \mathbf{y} + (a - D \cdot \mathbf{y})^\top \cdot u_i, \forall i \in \mathcal{A}_R$ reciben el nombre de cortes de optimalidad, mientras que las restricciones $(a - D \cdot \mathbf{y})^\top \cdot v_j \leq 0, \forall j \in \mathcal{D}_R$ son conocidas como cortes de factibilidad. El problema (A.18) puede tener un óptimo no finito aun cuando el problema original tenga un óptimo finito. Para evitar este comportamiento, se

pueden acotar las variables \mathbf{y} y $\boldsymbol{\alpha}$ considerando un valor M suficientemente grande. De este modo, se podrían añadir al problema maestro las restricciones $-M \leq \mathbf{y} \leq M$ y $-M \leq \boldsymbol{\alpha}$.

Por otra parte, si el subproblema dual es no acotado, se obtiene una dirección extrema resolviendo el siguiente problema,

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{m_1}} (a - D \cdot \bar{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{v} \\ \text{s.a:} & \\ & A^\top \cdot \mathbf{v} \leq 0 \\ & \vec{1}^\top \cdot \mathbf{v} \leq 1 \\ & \mathbf{v} \geq 0, \end{aligned} \tag{A.19}$$

donde $\vec{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{m_1}$. La solución óptima del problema (A.19) es una dirección extrema de la región factible del subproblema dual.

A continuación explicamos en líneas generales como actúa el algoritmo iterativo de Benders, explicando en particular la relación entre el problema maestro (A.18) y el subproblema dual (A.14). Se comienza resolviendo el problema maestro, obteniendo un valor $\bar{\mathbf{y}}$ para la variable \mathbf{y} así como una cota inferior para la función objetivo del problema original. Haciendo uso de este valor $\bar{\mathbf{y}}$ se resuelve el subproblema dual. Si el subproblema dual tiene una solución óptima finita, esta será un punto extremo de su región factible y el valor de la función objetivo será una cota superior para la función objetivo del problema original. Además se usa este punto extremo para incorporar al problema maestro un corte de optimalidad. Si el subproblema dual no es acotado, la resolución del problema (A.19) nos proporciona una nueva dirección extrema de la región factible. Dicha dirección se utiliza para incorporar en el problema maestro un corte de factibilidad. En cualquier caso, tras la incorporación del corte pertinente, se resuelve de nuevo el problema maestro y se repiten los pasos mientras que la cota inferior sea estrictamente menor que la superior.

Nótese que el algoritmo finaliza en un número finito de iteraciones. Esto es así, pues en cada una de ellas se obtiene un punto o una dirección extrema de la región factible del subproblema dual (que es la misma en todas las iteraciones al no depender del valor $\bar{\mathbf{y}}$ considerado). Además, el número de puntos y direcciones extremas es finito. Por otra

parte, la incorporación de los cortes de factibilidad al problema maestro impide obtener dos veces la misma dirección extrema al resolver el problema (A.19). Finalmente, la obtención del mismo punto extremo en dos iteraciones implica el cumplimiento de la condición de parada del algoritmo.

El Algoritmo 3 muestra el pseudocódigo del algoritmo de descomposición de Benders. Una descripción más detallada del mismo se puede encontrar en [35] y [45].

La flexibilidad del algoritmo de Benders permite que en muchas ocasiones sea habitual crear cortes específicos a partir del conocimiento del problema. Esto es algo habitual en problemas binarios o enteros. Ejemplos de ello son [50], [51] y [74].

Por último, indicar que existen diversas adaptaciones del algoritmo de Benders. Una de ellas consiste en adaptar el algoritmo para explotar la estructura del problema original permitiendo su descomposición en un problema maestro y varios subproblemas. Otro ejemplo consiste en su adaptación para la resolución de problemas no lineales [38]. Además, con el auge de la programación estocástica, es habitual encontrar en la literatura adaptaciones del algoritmo para la resolución de estos problemas. Estas adaptaciones son conocidas como L-Shape, para el caso en 2 etapas, o Nested Distance, para el caso multietapa [16].

Algoritmo 3 Descomposición de Benders

Input: Inicializar $UB \leftarrow \infty$, $LB \leftarrow -\infty$, y los subconjuntos de puntos extremos y direcciones extremas $\mathcal{A}_R = \mathcal{D}_R \leftarrow \emptyset$.

- 1: **while** $LB < UB$ **do**
 - 2: Resolver el problema maestro (A.18).
 - 3: Obtener una solución óptima α e y .
 - 4: Establecer $\bar{y} \leftarrow y$ y actualizar $LB \leftarrow \alpha$.
 - 5: Resolver el subproblema dual (A.14).
 - 6: **if** El subproblema es factible **then**
 - 7: Obtener una solución primal x y dual u óptimas.
 - 8: Añadir el punto extremo $u_p \leftarrow u$ (con $p = |\mathcal{A}_R| + 1$) al conjunto de puntos extremos $\mathcal{A}_R \leftarrow \mathcal{A}_R \cup \{p\}$ y añadir el corte de optimalidad al problema maestro.
 - 9: Actualizar $UB \leftarrow c^\top \cdot x + d^\top \cdot \bar{y}$
 - 10: **else**
 - 11: Resolver el problema (A.19).
 - 12: Obtener una solución óptima v (dirección extrema del subproblema dual).
 - 13: Añadir la dirección extrema $v_l \leftarrow v$ (con $l = |\mathcal{D}_R| + 1$) al conjunto de direcciones extremas $\mathcal{D}_R \leftarrow \mathcal{D}_R \cup \{l\}$ y añadir el corte de factibilidad al problema maestro.
 - 14: Devolver la solución (x, y) .
-

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 1.1. Esquema de uso de la investigación operativa. | 5 |
| 3.1. Evolución histórica de los valores e índices de poder. . . . | 23 |
| 4.1. Incendios con intervención de medios en 2018 en España. Copyright 2019 por Gobierno de España. Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación [40]. Reimpreso con permiso. | 34 |
| 4.2. Ilustración del problema de Donovan y Rideout. | 38 |
| 4.3. Ilustración del problema SARC | 39 |
| 4.4. Ilustración del problema AARV | 42 |
| 4.5. Ilustración del problema AAPR | 44 |
| 4.6. Diagrama de flujo para la contención eficiente de un incendio forestal. | 47 |